

БИБЛИОТЕКА
ИНЖЕНЕРА

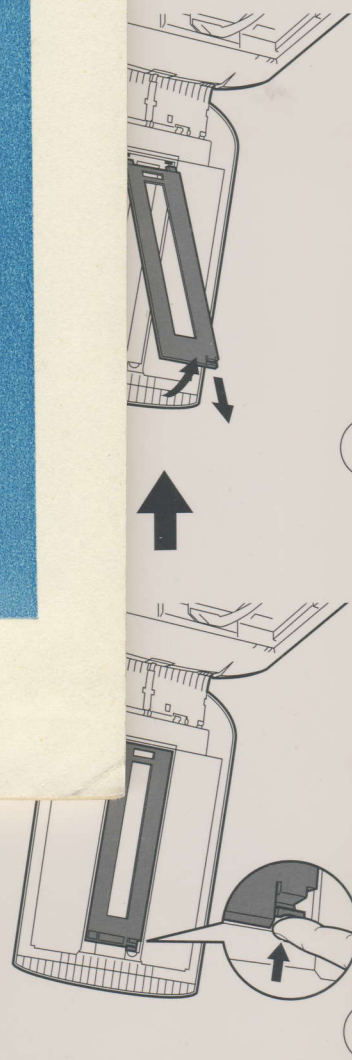


ВИБРАЦИОННАЯ
ТЕХНИКА

Р. А. Бараускас
Г. П. Кульветис
К. М. Рагульские

Расчет и проектирование вибродвигателей

МАШИНОСТРОЕНИЕ



Рецензент Н. Н. Шабров

Бараускас Р. А. и др.

Б24 Расчет и проектирование вибродвигателей/Р. А. Бараускас, Г. П. Кульветис, К. М. Рагульскис — Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1984.— 101 с., ил.— (Б-ка инженера. Вибрационная техника; Вып. 2)

35 к.

В брошюре рассмотрены вопросы расчета и проектирования вибродвигателей на основе метода конечных элементов. Представлены алгоритмы для расчета и проектирования вибродвигателей на ЭВМ. Приведены данные по расчету и проектированию наиболее перспективных вибродвигателей с ударным и фрикционным взаимодействием в контактных парах.

Брошюра предназначена для инженерно-технических работников НИИ и КБ, занимающихся созданием прецизионных машин и механизмов.

Б $\frac{2702000000-010}{038(01)-84}$ 10-84

ББК 34.41
6П5.2

© Издательство «Машиностроение», 1984 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди созданных в настоящее время приборов и устройств вибрационной техники заметное место занимают вибрационные преобразователи движения — вибродвигатели. Принцип их действия основан на преобразовании высокочастотных волновых колебаний входного звена в направленное шаговое или равномерное движение выходного звена при помощи механического взаимодействия между звеньями по некоторой части их поверхностей.

Вибродвигатели значительно превосходят другие известные типы двигателей по точности позиционирования, устойчивости к внешним воздействиям и обладают меньшими габаритными размерами. Они находят широкое применение в прецизионной технике, робототехнике, используются при создании лентопротяжных механизмов, гироскопов и т. п.

Однако до настоящего времени вибродвигатели исследованы недостаточно. Высокочастотные волновые процессы и существенно нелинейное контактное взаимодействие в контактных парах вибродвигателей приводят к ряду явлений, не наблюдавшихся в механических системах ранее.

В настоящей книге расчет вибродвигателей осуществлен при помощи метода конечных элементов. Общетеоретические предпосылки применения метода конечных элементов к описанию динамики вибродвигателей позволяют разработать программное обеспечение ЭВМ для их расчета и автоматизированного проектирования.

Все отзывы и пожелания по данной работе просим направлять в адрес издательства: 191065, Ленинград, ул. Дзержинского, 10.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРИМЕНЕНИИ К РАСЧЕТУ ВИБРОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Основной частью вибродвигателя является вибропреобразователь, под воздействием высокочастотного электрического напряжения совершающий высокочастотные механические колебания. Принцип действия вибропреобразователя может быть основан на электрострикционном, магнитострикционном, пьезоэлектрическом и других эффектах. Остановимся подробно лишь на пьезокерамических вибропреобразователях (в дальнейшем будем их называть просто пьезопреобразователями), так как уравнения, описывающие явления в различных вибропреобразователях, во многих случаях аналогичны уравнениям пьезоэффекта.

Действие пьезопреобразователей как входных, так и выходных звеньев вибродвигателей основано на возбуждении в них волновых колебаний при помощи обратного пьезоэффекта. Применение метода конечных элементов МКЭ к расчету колебаний пьезокерамических преобразователей позволяет проводить их эффективное исследование и проектирование. Вопросы теории и практической реализации МКЭ подробно описаны в монографиях [13] и [27]. В настоящее время имеется также обширная библиография работ по вопросам расчета пьезопреобразователей. Следует отметить работу [31], посвященную применению МКЭ к анализу и синтезу электромеханических систем. В ней приведена конечноэлементная формулировка задачи теории пьезоэлектричества в двумерном случае. Постановка общей задачи электротермоупругости представлена в [36]. В работе [24] МКЭ применяется к расчету кольцевых, цилиндрических и композитных пластинчатых преобразователей, используемых в качестве входных звеньев вибродвигателей.

В настоящей главе приводятся основы МКЭ применительно к расчету пьезокерамических преобразователей. В общем случае преобразователи описываются методами теории термопьезоэлектричества на основе общей теории поведения сплошной среды.

В п. 1.1 приводится элементарный вывод выражений структурных матриц пьезопреобразователя, а в пп. 1.2 и 1.3 сформулирована общая задача расчета пьезопреобразователя в конечноэлементной постановке.

При рассмотрении высокочастотных колебаний пьезопреобразователей в ряде случаев возможны некоторые упрощения. Так, обычно термические процессы протекают гораздо медленнее механических и электрических, поэтому без значительной

погрешности можно опустить члены, отражающие связанность температурного поля с механическим и электрическим, а также инерционные члены теплопроводности. Кроме того, во многих практических случаях генератор переменного электрического напряжения, подключенный к электродам пьезопреобразователя, является достаточно мощным, чтобы переменные потенциалы на электродах пьезокерамики можно было считать заданными. В п. 1.4 выведены соотношения МКЭ для слоистых композитных пьезопреобразователей. Для описания связи между деформациями и перемещениями таких конечных элементов КЭ используются соотношения теории стержней и оболочек.

1.1. МАТРИЦЫ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

При расчете динамики пьезопреобразователей в отличие от расчета динамики механических систем необходимо учитывать происходящие механические и электрические явления, а также связь между ними. Поэтому в МКЭ состояние каждой точки КЭ (рис. 1.1) можно представить значениями узловых перемещений u и потенциала φ .

При описании КЭ перемещения и потенциал любой его точки выражаются через их узловые значения в виде

$$u = [N] U^e; \quad (1.1)$$

$$\varphi = [L] \Phi^e, \quad (1.2)$$

где $[N]$ и $[L]$ — в общем случае функции положения, а U^e и Φ^e — узловые перемещения и потенциалы соответственно.

Если известны перемещения во всех точках КЭ, можно, используя уравнения теории упругости из (1.1), получить выражение деформаций в любой точке КЭ в виде

$$\varepsilon = [B] U^e. \quad (1.3)$$

Так как связь напряженности электростатического поля E с потенциалом выражается соотношением

$$E = -\text{grad } \varphi,$$

величина E с помощью (1.2) в любой точке КЭ может быть представлена, аналогично (1.3), в виде

$$E = -[B_E] \Phi^e. \quad (1.4)$$

Уравнения пьезоэлектрического эффекта для элементарного объема выражаются в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= [c^E] \varepsilon - [e] E; \\ D &= [e]^T \varepsilon + [\varepsilon^S] E. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

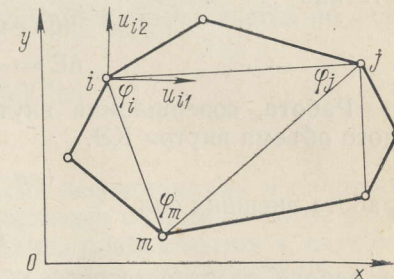


Рис. 1.1. Конечноэлементная дискретизация пьезокерамической области

где σ — механические напряжения; D — вектор электрического смещения; $[c^E]$ — тензор жесткости при постоянном электрическом поле; $[e]$ — тензор пьезоэлектрических констант; $[\varepsilon^S]$ — тензор диэлектрических констант при постоянной деформации.

Подставляя (1.3) и (1.4) в (1.5), для любой точки КЭ получим

$$\sigma = [c^E] [B] U^e + [e] [B_E] \Phi^e;$$

$$D = [e]^T [B] U^e - [\varepsilon^S] [B_E] \Phi^e.$$

Пусть в каждой точке КЭ задана распределенная внешняя сила f , а на поверхности КЭ один или несколько узлов связаны с электродами. В этих узлах приложены узловые заряды, представляемые вектором узловых зарядов Q^e . Уравнения равновесия для КЭ можно получить приравнявая работы внутренних механических и электромеханических сил работе внешних сил при совершении точками КЭ виртуального перемещения δu и виртуального изменения потенциала $\delta \Phi$. При этом виртуальные изменения деформаций и электрического поля равны соответственно

$$\delta \varepsilon = [B] \delta U^e;$$

$$\delta E = -[B_E] \delta \Phi^e.$$

Работа, совершаемая внутренними силами для элементарного объема внутри КЭ,

$$\delta \varepsilon \sigma + \delta E^T D,$$

работа внешних сил

$$\delta u^T f,$$

а работа электростатических сил над узловыми зарядами Q^e при виртуальном изменении потенциалов узловых точек $\delta \Phi^e$

$$\delta \Phi^{eT} Q^e.$$

Переходя к узловым переменным, осуществляя интегрирование по объему элемента V^e и приравнявая работы внутренних и внешних сил, получим

$$\int_{V^e} (\delta \varepsilon^T \sigma + \delta E D) dV + \delta \Phi^{eT} Q^e = \int_{V^e} \delta U^T f dV;$$

$$\int_{V^e} [(\delta U^e)^T ([B]^T [c^E] [B] U^e + [B]^T [e] [B_E] \Phi^e) - (\delta \Phi^e)^T ([B_E]^T [e]^T [B] U^e - [B_E]^T [\varepsilon^S] [B_E] \Phi^e)] dV + \delta \Phi^{eT} Q^e = \int_{V^e} (\delta U^e)^T [N] f dV. \quad (1.6)$$

Так как δU^e и $\delta \Phi^e$ можно считать произвольными, уравнение (1.6) распадается на два уравнения:

$$\begin{cases} [K^e] U^e + [T^e] \Phi^e = F^e; \\ [T^e]^T U^e - [S^e] \Phi^e = Q^e. \end{cases} \quad (1.7)$$

В уравнениях (1.7) матрицы КЭ имеют вид: матрица жесткости

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [c^E] [B] dV,$$

электромеханическая матрица

$$[T^e] = \int_{V^e} [B]^T [e] [B_E] dV,$$

емкостная матрица

$$[S^e] = \int_{V^e} [B_E]^T [\varepsilon^S] [B_E] dV,$$

а вектор механических узловых усилий F^e вычисляется по формуле

$$F^e = \int_{V^e} [N]^T f dV.$$

Силы, определяемые начальными деформациями и напряжениями, распределенными поверхностными силами, а также инерционными и диссипативными силами, прибавляются к первому уравнению (1.7) таким же образом, как и при расчете обычных механических систем [13].

Как видно, в (1.7) неизвестных больше, чем уравнений, так как в общем случае заряды узловых точек неизвестны. Поэтому необходимо добавить граничные условия. Механические граничные условия достаточно ясны и введение их в уравнения подробно описано в соответствующей литературе по МКЭ, электрические же граничные условия требуют более детального рассмотрения. В общем случае они рассматриваются в пп. 1.2 и 1.3. Например, если КЭ на своей поверхности не имеет электрода, то граничным условием для его узлов является нулевой заряд. При подведении к электродам напряжения из достаточно мощного источника питания часто можно считать заданными потенциалы на узлах КЭ. Учет такого рода граничных условий позволяет сделать число неизвестных равным числу уравнений и решить (1.7).

Также следует отметить, что при построении структурных матриц КЭ необходимо учитывать ориентацию осей кристаллической симметрии материала пьезопреобразователя относительно осей локальной системы координат и, в случае их несовпадения, осуществить соответствующую трансформацию тензоров жесткости, пьезоэлектрических и диэлектрических констант.

1.2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТЕРМОПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВА В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

Рассмотрим пьезокерамическое тело в трехмерном пространстве, занимающее объем V и ограниченное площадью поверхности S . Площадь поверхности S разделена на части $S_U \cup S_\sigma = S_\varphi \cup S_D = S_\theta \cup S_h = S$ так, что $S_U \cap S_\sigma = S_\varphi \cap S_D = S_\theta \cap S_h = 0$, а $\mathbf{n}$ является внешней нормалью к поверхности. Пусть в объеме, занимаемом пьезокерамическим телом, действует вектор объемных сил $\mathbf{f} = (X, Y, Z)^T$, где X, Y, Z — компоненты вектора объемных сил в направлениях декартовой системы осей координат.

На S_σ задан вектор поверхностных сил $\mathbf{g}_S = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$, на S_U —

вектор перемещений $\mathbf{u}_S = \begin{pmatrix} u_{1S} \\ u_{2S} \\ u_{3S} \end{pmatrix}$ в направлениях осей координат.

Аналогично на S_D , S_φ заданы заряд g_S и потенциал φ_S , а на S_h , S_θ — тепловой поток v_S и температура θ_S соответственно. Введем векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, перемещений $\mathbf{u}$ электрического поля $\mathbf{E}$, электрического смещения $\mathbf{D}$ и теплового потока $\mathbf{h}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^T &= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}); \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}); \\ \mathbf{u}^T &= (u_1, u_2, u_3); \quad \mathbf{E}^T = (E_1, E_2, E_3); \quad \mathbf{D}^T = (D_1, D_2, D_3); \\ \mathbf{h}^T &= (h_1, h_2, h_3), \end{aligned}$$

а также потенциал φ , отклонение температуры θ от некоторой положительной температуры отсчета θ_0 и плотность энтропии η . В дальнейшем будем использовать дифференциальные операторы — матрицы операций дифференцирования:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad [a] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

и матрицы направляющих косинусов внешней нормали $\mathbf{n}$ к поверхности:

$$[A_S] = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) \\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) \\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) & 0 & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \end{bmatrix}; \quad [a_S] = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) \\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) \end{bmatrix}.$$

Запишем уравнения теории термопьезоэлектричества в матричном виде [36] для объема V :

$$\left. \begin{aligned} [A]^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} + \mu \dot{\mathbf{u}}, \in V; \\ [a]^T \mathbf{D} &= 0, \in V; \\ [a]^T \mathbf{h} &= -\theta_0 \dot{\eta}, \in V, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= [A] \mathbf{u}, \in V; \\ \mathbf{E} &= -[a] \varphi, \in V; \\ \mathbf{h} &= -[k][a] \theta, \in V, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [c^E](\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) - [e] \mathbf{E} - [\lambda] \theta + \boldsymbol{\sigma}_0, \in V; \\ \mathbf{D} &= [e]^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + [\varepsilon^S] \mathbf{E} + [l] \theta, \in V; \\ \eta &= [\lambda]^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + [l]^T \mathbf{E} + \alpha \theta, \in V, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

где $[k]$ — тензор констант теплопроводности; $[c^E]$ — тензор коэффициентов жесткости при постоянном электрическом поле; $[\varepsilon^S]$ — тензор диэлектрических констант при постоянной деформации; $[e]$ — тензор пьезоэлектрических констант; $[\lambda]$ — тензор констант температурных напряжений; $[l]$ — тензор пьезоэлектрических констант; α — константа материала ($\alpha = \rho c_V \theta_0^{-1}$, где c_V — удельная теплота при постоянном объеме); ρ — плотность материала; μ — коэффициент демпфирования материала, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_0$ — начальные деформации и напряжения соответственно.

Граничными условиями, определяемыми поверхностными силами, перемещениями, зарядами, потенциалами, температурами и тепловым потоком через поверхность на частях площади поверхности S_σ , S_U , S_D , S_φ , S_h , $S_\theta \in S$, здесь соответственно являются

$$[A_S]^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g}_S, \in S_\sigma; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_S, \in S_U, \quad (1.11)$$

$$[a_S]^T \mathbf{D} = q_S, \in S_D; \quad \varphi = \varphi_S, \in S_\varphi, \quad (1.12)$$

$$[a_S]^T \mathbf{h} = v_S, \in S_h; \quad \theta = \theta_S, \in S_\theta. \quad (1.13)$$

Применив формулы интегрирования по частям и теорему Гаусса — Остроградского, нетрудно показать, что для рассмотренных выше операторов $[A]$, $[a]$, произвольных векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6)$ с компонентами — функциями координат и скалярной функции координат ξ , определенных всюду в V и на границе S , справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} \int_V ([A]\xi)^T \kappa dV &= \int_S \xi^T [A_S]^T \kappa dS - \int_V \xi^T [A]^T \kappa dV; \\ \int_V ([a]\xi)^T \xi dV &= \int_S \xi [a_S]^T \xi dS - \int_V \xi [a]^T \xi dV. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Используя (1.14), уравнения (1.8) — (1.13) представим в виде интегральных тождеств.

Истинные величины σ , ε , u , D , E , φ , η , h , θ , т. е. удовлетворяющие уравнениям (1.8) — (1.10) и граничным условиям (1.11) — (1.13), имеют единственные значения на основании теоремы единственности решения системы (1.8) — (1.13). Образуют классы виртуальных величин $\bar{\sigma}$, $\bar{D}$, $\bar{h}$, $\bar{\eta}$, удовлетворяющих уравнениям (1.8) и граничным условиям, и виртуальных величин $\bar{\varepsilon}^*$, $\bar{u}^*$, $\bar{E}^*$, $\bar{\varphi}^*$, $\bar{\theta}^*$, удовлетворяющих уравнениям (1.9) и граничным условиям. Формулы (1.8), (1.9) и (1.11) — (1.13) не определяют виртуальных величин единственным образом, а истинные величины, очевидно, принадлежат этим классам.

Используя тождества (1.14), уравнения (1.8), (1.9) и граничные условия (1.11) — (1.13), можно показать, что для виртуальных величин выполняются следующие интегральные тождества:

$$\left. \begin{aligned} \int_V \bar{\varepsilon}^{*T} \bar{\sigma} dV &= \int_{S_\sigma} \bar{u}^{*T} g_S dS + \int_{S_u} u_S [A_S]^T \bar{\sigma} dS + \\ &+ \int_V \bar{u}^{*T} (f - \rho \ddot{u}^* - \mu \dot{u}^*) dV; \\ \int_V \bar{E}^{*T} \bar{D} dV &= - \int_{S_D} \bar{\varphi}^* q_S dS - \int_{S_\varphi} \varphi_S [a_S]^T \bar{D} dS; \\ \int_V ([a] \bar{\theta}^*)^T \bar{h} dV &= \int_{S_h} \bar{\theta}^* v_S dS + \int_V \theta (\theta_0 \dot{\eta}) dV. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Положим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma, \quad \bar{D} = D, \quad \bar{\eta} = \eta, \quad \bar{\varepsilon}^* = \varepsilon + \delta\varepsilon, \\ \bar{E}^* &= E + \delta E, \quad \bar{h} = h, \quad \bar{u}^* = u + \delta u, \\ \bar{\varphi}^* &= \varphi + \delta\varphi, \quad \bar{\theta}^* = \theta + \delta\theta, \quad \dot{\bar{u}}^* = \dot{u}, \quad \ddot{\bar{u}}^* = \ddot{u}, \end{aligned}$$

где δ , ε , u , D , E , φ , η , h , θ — истинные величины, т. е. удовлетворяющие всем уравнениям теории термопьезоэлектричества (1.8) — (1.10) и граничным условиям (1.11) — (1.13); δ — вариации истинных величин, $\delta\varepsilon = [A]\delta u$, $\delta E = -[a]\delta\varphi$.

Подставляя эти величины в (1.15) и принимая во внимание, что $\delta u = 0$ на S_u , $\delta\varphi = 0$ на S_φ , $\delta\theta = 0$ на S_θ , а истинные величины также удовлетворяют уравнениям (1.15), получим вариационные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \int_V \delta\varepsilon^T \sigma dV &= \int_{S_\sigma} \delta u^T g_S dS + \int_V \delta u^T (f - \rho \ddot{u} - \mu \dot{u}) dV; \\ \int_V \delta E^T D dV &= - \int_{S_D} \delta\varphi q_S dS; \\ \int_V ([a] \delta\theta)^T h dV &= \int_{S_h} \delta\theta v_S dS - \theta_0 \int_V \delta\theta \dot{\eta} dV. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Не будем заранее считать σ , D , h , η , $\ddot{u}$, $\dot{u}$ истинными и пусть они лишь удовлетворяют тождествам (1.16). Применив (1.14) непосредственно к левой части (1.16) и полученные тождества объединив с (1.16), получим

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_\sigma} \delta u^T ([A_S]^T \sigma - g_S) dS - \int_V \delta u^T ([A]^T \sigma + f - \rho \ddot{u} - \mu \dot{u}) dV &= 0; \\ \int_{S_D} \delta\varphi ([a_S]^T D - q_S) dS - \int_V \delta\varphi ([a]^T D) dV &= 0; \\ \int_{S_h} \delta\theta ([a_S]^T h - v_S) dS - \int_V \delta\theta ([a]^T h + \theta_0 \dot{\eta}) dV &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Заметим, что в силу произвольности δu , $\delta\varphi$, $\delta\theta$ последнее соотношение налагает на σ , D , h , η требования о выполнении уравнений (1.8) и граничных условий на S_σ , S_D , S_h . Таким образом, система (1.16) содержит в себе уравнения (1.8) и граничные условия на S_σ , S_D , S_h . Добавив к этой системе уравнения (1.10) и граничные условия (1.11) — (1.13) на S_u , S_φ , S_θ , приходим к постановке задачи термопьезоэлектричества в перемещениях, потенциалах и температурах. В результате, если u , φ , θ удовлетворяют граничным условиям (1.11) — (1.13) на S_u , S_φ , S_θ , а также интегральным тождествам

$$\left. \begin{aligned} \int_V ([A] \delta u)^T ([c^E] [A] u + [e] [a] \varphi - [\lambda] \theta) dV + \\ + \int_V \delta u^T (\rho \ddot{u} + \mu \dot{u}) dV &= \int_{S_\sigma} \delta u^T g_S dS + \int_V \delta u^T f dV + \\ + \int_V ([A] \delta u)^T [c^E] \varepsilon_0 dV - \int_V ([A] \delta u)^T \sigma_0 dV; \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_V ([a] \delta \varphi)^T ([e]^T [A] \mathbf{u} - [\partial^S] [a] \varphi + [l] \theta) dV = \\ = \int_{S_0} \delta \varphi q_S dS + \int_V ([a] \delta \varphi)^T [e]^T \mathbf{e}_0 dV; \\ \int_V ([a] \delta \theta)^T [k] [a] \theta dV + \theta_0 \int_V \delta \theta ([\lambda]^T [A] \dot{\mathbf{u}} - \\ - [l]^T [a] \dot{\varphi} + \alpha \dot{\theta}) dV = - \int_{S_h} \delta \theta v_S dS, \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

то они удовлетворяют всем уравнениям теории термопьезоэлектричества и граничным условиям, т. е. являются истинными перемещениями, потенциалами и температурами. Полученные интегральные тождества служат основой для выявления соотношений МКЭ в применении к расчету пьезопреобразователей.

1.3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МКЭ В ПРИМЕНЕНИИ К РАСЧЕТУ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Пусть область, занимаемая пьезокерамическим телом, разбита на конечные элементы. Рассмотрим объем V^e , занимаемый КЭ с узлами $i, j, m \dots$, ограниченный площадью поверхности S^e . Состояние каждой точки КЭ описывается перемещениями

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, потенциалом φ и температурой θ . Согласно общей схеме МКЭ, значения узловых параметров $\mathbf{u}$, φ , θ в любой точке КЭ выразим через значения узловых величин

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) = [N] \mathbf{U}^e = [N_i, N_j, N_m \dots] \begin{pmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \\ \vdots \end{pmatrix}; \\ \varphi(x, y, z) = [L] \Phi^e = [L_i, L_j, L_m \dots] \begin{pmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \\ \vdots \end{pmatrix}; \\ \theta(x, y, z) = [P] \Xi^e = [P_i, P_j, P_m \dots] \begin{pmatrix} \Xi_i \\ \Xi_j \\ \Xi_m \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

где $[N]$, $[L]$, $[P]$ — функции формы; $\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \end{pmatrix}$ — узловые перемещения; Φ_i — узловые потенциалы; Ξ_i — узловые температуры.

Для облегчения дальнейших выкладок сделаем обозначения $[B] = [A] [N]$, $[B_E] = [a] [L]$, $[B_T] = [a] [P]$. Подставив (1.18) и интегральные тождества (1.17) и учитывая, что $\delta \mathbf{u} = [N] \delta \mathbf{U}^e$, $\delta \varphi = [L] \delta \Phi^e$, $\delta \theta = [P] \delta \Xi^e$, и что тождества (1.17) справедливы для любых $\delta \mathbf{u}$, $\delta \varphi$, $\delta \theta$, значит, и для любых $\delta \mathbf{u}^e$, $\delta \Phi^e$, $\delta \Xi^e$, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} [M^e] \ddot{\mathbf{U}}^e + [C^e] \dot{\mathbf{U}}^e + [K^e] \mathbf{U}^e + [T^e] \Phi^e - [V^e] \Xi^e &= \mathbf{F}^e; \\ [T^e]^T \mathbf{U}^e - [S^e] \Phi^e + [W^e] \Xi^e &= \mathbf{Q}^e; \\ [H^e] \dot{\Xi}^e + \theta_0 [V^e]^T \dot{\mathbf{U}}^e - \theta_0 [W^e] \dot{\Phi}^e + [G^e] \Xi^e &= \mathbf{z}^e. \end{aligned}$$

В этой системе матрицы КЭ определяются соответственно в виде матриц масс, демпфирования, жесткости, электроупругости, емкости, термоупругости, термоэлектрической, теплопроводности и теплоемкости:

$$\left. \begin{aligned} [M^e] &= \int_{V^e} [N]^T \rho [N] dV; \\ [C^e] &= \int_{V^e} [N]^T \mu [N] dV; \\ [K^e] &= \int_{V^e} [B]^T [c^E] [B] dV; \\ [T^e] &= \int_{V^e} [B]^T [e] [B_E] dV; \\ [S^e] &= \int_{V^e} [B_E]^T [\varepsilon^S] [B_E] dV; \\ [V^e] &= \int_{V^e} [B]^T [\lambda] [P] dV; \\ [W^e] &= \int_{V^e} [B_E]^T [l] [P] dV; \\ [G^e] &= \int_{V^e} [B_T]^T [k] [B_T] dV; \\ [H^e] &= \left(\int_{V^e} [P]^T [P] dV \right) \alpha \theta_0, \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

а векторы $\mathbf{F}^e$, $\mathbf{Q}^e$, $\mathbf{Z}_T^e$ определяются в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}^e &= \int_{S_\sigma^e} [\mathbf{N}]^T \mathbf{g}_s dS + \int_{V^e} [\mathbf{N}]^T \mathbf{f} dV + \int_{V^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{c}^E] \epsilon_0 dV - \\ &\quad - \int_{V^e} [\mathbf{B}]^T \sigma_0 dV; \\ \mathbf{Q}^e &= \int_{S_D^e} [\mathbf{L}]^T q_s dS + \int_{V^e} [\mathbf{B}_E]^T [\mathbf{e}]^T \epsilon_0 dV; \\ \mathbf{Z}_T^e &= - \int_{S_h^e} [\mathbf{P}]^T v_s dS. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Поверхностные интегралы в (1.20), очевидно, ненулевыми могут быть лишь в том случае, когда КЭ соприкасается с границей пьезокерамического тела. После составления структурных матриц ансамбля, осуществляемого обычным образом, система уравнений может быть представлена в компактной форме

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{\Xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \theta_0 V^T - \theta_0 W^T H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\Xi} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} K & T - V \\ T^T - S & W \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \\ \Xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Z}_T \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

В случае приложения к узлам сосредоточенных сил они должны быть присуммированы к соответствующим элементам вектора $\mathbf{F}$.

На практике граничные условия теплового потока часто задаются в виде

$$v_s = p(\theta - \theta_\infty + \theta_0),$$

где p — коэффициент теплообмена с окружающей средой; θ_∞ — температура окружающей среды; θ_0 — температура отсчета.

В таком случае нетрудно показать, что матрица теплопроводности КЭ и вектор $\mathbf{Z}_T^e$ принимает вид

$$\mathbf{G}^e = \int_{V^e} [\mathbf{B}_T]^T [k] [\mathbf{B}_T] dV + p \int_{S_h^e} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{P}] dS; \\ \mathbf{Z}_T^e = - \int_{S_h^e} [\mathbf{P}]^T (\theta_0 - \theta_\infty) dS.$$

При совпадении температуры отсчета с температурой окружающей среды $\theta_\infty \mathbf{Z}_T^e = 0$.

В случае необходимости учета влияния частоты колебаний пьезопреобразователя на величину коэффициента демпфирования μ , матрица демпфирования $[\mathbf{C}]$ принимается в виде

$$[\mathbf{C}] = \alpha_1 [\mathbf{M}] + \alpha_2 [\mathbf{K}], \quad (1.22)$$

где α_1 , α_2 — коэффициенты пропорциональности, определяемые по величинам добротности колебательной системы на двух различных частотах, либо экспериментально.

Во многих практических случаях, относящихся к расчету высокочастотных колебаний пьезопреобразователей, без значительной погрешности в системе (1.21) можно опустить члены связанности $\theta_0 [\mathbf{V}]^T \dot{\mathbf{U}}$, $-\theta_0 [\mathbf{W}]^T \dot{\Phi}$, а также инерционные члены теплопроводности $[\mathbf{H}] \ddot{\Xi}$. В такой квазистатической несвязанной постановке процесс решения разделяется на определение температурного поля по уравнению теплопроводности и решение задачи пьезоэлектричества.

Пьезопреобразователь в качестве входного звена вибродвигателя является элементом электрической цепи высокочастотного переменного тока, и определение его электрических характеристик представляет значительный интерес. Приведем основные соотношения МКЭ для определения таких характеристик. Не нарушая общности, опустим термомеханические, термоэлектрические и диссипативные члены в (1.21).

Примем механические граничные условия на S_u нулевыми, т. е. $\mathbf{U}_s = 0$ и вектор узловых усилий $\mathbf{F} = 0$, и опустим в матрицах жесткости масс $[\mathbf{K}]$, $[\mathbf{M}]$ и электромеханической матрице $[\mathbf{T}]$ строки и столбцы, соответствующие закрепленным по условию $\mathbf{U}_s = 0$ степеням свободы конечноэлементной модели пьезопреобразователя. Компоненты векторов Φ и $\mathbf{Q}$ перегруппируем в вид $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$, где индекс «1» соответствует узловым точкам на электродах, а индекс «2» — остальным узловым точкам, включающим в себя также узловые точки площади поверхности S_D . Заряды Q_2 на не покрытой электродами части пьезопреобразователя можно принять нулевыми, если только силовые линии электрического поля не покидают вещества пьезопреобразователя, что имеет место в большинстве случаев. Перегруппировав соответствующим образом строки и столбцы структурных матриц и приняв колебания пьезопреобразователя гармоническими $\mathbf{U} = \mathbf{U} \cos \omega t$, получим

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 M & T_1 & T_2 \\ T_1^T & -S_{11} & -S_{12} \\ T_2^T & -S_{12}^T & -S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Входящий в правую часть (1.23) заряд Q_1 на электродах в общем случае не известен. Однако в задачах, связанных с применением пьезопреобразователей в вибродвигателях, обычно известны потенциалы Φ_1 и число неизвестных в (1.23) становится равным числу уравнений. В случае, когда Φ_1 нельзя считать неизвестным, для переменного синусоидального входного напряжения заряд Q_1 связан с Φ_1 соотношением

$$j\omega Q_1 = [Y_E] \Phi_1 = I_1, \quad (1.24)$$

где $[Y_E] = [y_{ij}]$ — матрица кажущихся входных проводимостей.

Каждая компонента y_{ij} является кажущейся переходной проводимостью между узлами i и j , а $I = (i_i)$ — вектор электрических токов, текущих в соответствующие узлы. Явное выражение $[Y_E]$ получается при решении совместно уравнений (1.23) и (1.24):

$$[Y_E] = \frac{1}{j\omega} \left\{ -[S_{11}] + [T_1^T] - [S_{12}] \left[\begin{array}{cc} K - \omega^2 M & T_2 \\ T_2^T & -S_{22} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} T_1 \\ -S_{12}^T \end{array} \right] \right\}. \quad (1.25)$$

Важной характеристикой пьезопреобразователей являются их собственные частоты и моды колебаний в случае коротко замкнутых ($\Phi_1 = 0$) или разомкнутых ($Q_1 = 0$) электродов (соответственно резонансы и антирезонансы). Характеристические уравнения для определения этих частот и мод получаются из (1.23) при условиях $\Phi_1 = 0$ и $Q_1 = 0$ соответственно:

а) коротко замкнутые электроды ($\Phi_1 = 0$):

$$\det \{ [K + T_2 S_{22}^{-1} T_2^T] - \omega^2 [M] \} = 0;$$

б) разомкнутые электроды ($Q_1 = 0$):

$$\det ([K] + [T] [S^{-1}] [T]^T - \omega^2 [M]) = 0.$$

При резонансных собственных частотах динамическая проводимость пьезопреобразователя бесконечна (см. второй член в выражении (1.25) матрицы входных проводимостей $[Y_E]$). При колебаниях на этих собственных частотах входная проводимость равна нулю, т. е. ток в цепи пьезопреобразователя — источник равен нулю.

1.4. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ И ОБОЛОЧЕЧНЫХ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

В применении к вибродвигателям часто используются композитные пьезопреобразователи, выполненные в виде прикрепленных друг к другу двух пьезокерамических пластинок с противоположными направлениями осей поляризации, либо асимметричные биморфные пьезопреобразователи, состоящие из прикрепленных друг к другу пьезокерамической и металлической пластинок. Такая конструкция позволяет эффективно возбуж-

дать как изгибные, так и продольные колебания и придать контактным элементам вибродвигателя, прикрепленным к пьезопреобразователю, желаемую траекторию движения. Для расчета таких пьезопреобразователей по МКЭ можно использовать соотношения, приведенные ранее. Однако в большинстве случаев их толщина значительно меньше остальных измерений, следовательно, толщинные деформации могут быть не учтены. Поэтому введение толщинных узлов нецелесообразно, более приемлемым представляется воспользоваться уравнениями пластин и оболочек совместно с уравнениями теории пьезоэлектричества для описания КЭ. Другие возможные упрощения обусловлены такими особенностями как направленность оси поляризации по толщине, изотропность материала в плоскости пьезопреобразователя, пренебрежимо малая часть поверхности, не покрытая электродами и т. п.

Биморфный асимметричный КЭ в двумерной системе координат. Конечный элемент биморфного асимметричного пьезопреобразователя в двумерной системе координат рис. 1.2, а. Верхний его слой пьезокерамический толщиной h_1 , а нижний — металлический толщиной h_2 . Рассмотрим колебания пьезопреобразователя по его длине, а распределение смещений по ширине примем постоянным. Локальную систему координат выберем таким образом, чтобы плоскость xOy была нейтральной плоскостью, расстояния между точками которой при малых прогибах КЭ не изменяются. Начало системы координат выберем совпадающим с краем КЭ, а расстояние между нейтральной плоскостью и нижней гранью пьезопластины обозначим h_0 . Приняв величины электрического смещения и поля D_3 и E_3 постоянными по толщине, основные уравнения пьезоэффекта представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(x, z) &= -h_{31} D_3(x) + c_{11}^D \tilde{\epsilon}_1(x, z); \\ D_3(x) &= e_{31} \tilde{\epsilon}_1(x) + \epsilon_{33}^S E_3(x). \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

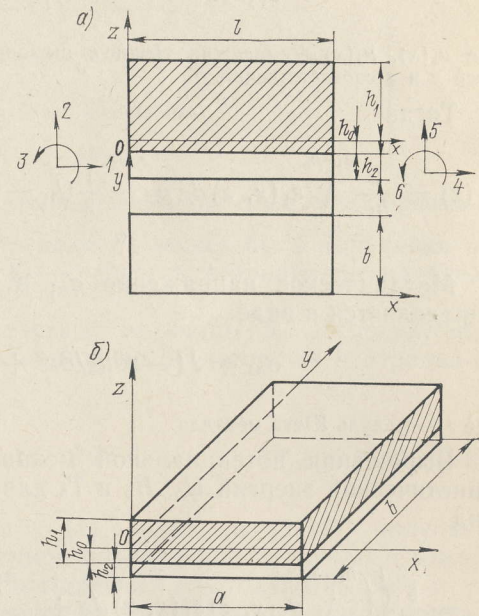


Рис. 1.2. Конечный элемент биморфного асимметричного пьезопреобразователя в двумерной (а) и пространственной (б) системе координат: l и b — длина и ширина пьезопреобразователя соответственно

где $h_{31} = e_{31}/\varepsilon_{33}^S$, а $\tilde{\varepsilon}_1(x)$ — средняя деформация пьезопластины по толщине в направлении оси x .

Деформация $\varepsilon_1(x, z)$ на высоте z над нейтральной поверхностью xOy определяется известным уравнением

$$\varepsilon_1(x, z) = -z \partial^2 u_3 / \partial x^2 + \partial u_1 / \partial x, \quad (1.27)$$

где $u_1(x)$, $u_3(x)$ — смещения точки x пьезопреобразователя в направлениях осей x и z соответственно.

Тогда

$$\tilde{\varepsilon}_1(x) = \frac{1}{h_1} \int_{h_0}^{h_1-h_0} \varepsilon_1(x, z) dz = -\frac{1}{2} (h_1 - 2h_0) \partial^2 u_3 / \partial x^2 + \partial u_1 / \partial x. \quad (1.28)$$

Механическое напряжение σ_{n1} в металлической пластинке определяется в виде

$$\sigma_{n1} = J (-z \partial u_3 / \partial x^2 + \partial u_1 / \partial x), \quad (1.29)$$

где J — модуль Юнга металла.

Выражения потенциальной механической, электрической и кинетической энергий U_9 , H_9 и T_9 для КЭ соответственно имеют вид

$$U_9^e = \frac{b}{2} \int_0^l \left(\int_{-h_0}^{h_1-h_0} \sigma_1(x, z) \varepsilon_1(x, z) dz + \int_{-(h_0+h_2)}^{-h_0} J \varepsilon_1^2(x, z) dz \right) dx; \quad (1.30)$$

$$H_9^e = \frac{b}{2} \int_0^l \int_{-h_0}^{h_1-h_0} E_3(x) D_3(x) dz dx; \quad (1.31)$$

$$T_9^e = \frac{b}{2} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \int_0^b (\dot{u}_3^2 + \dot{u}_1^2) dx. \quad (1.32)$$

где ρ_1 , ρ_2 — плотности материалов пьезо- и металлической пластинок.

Из уравнений (1.26) — (1.31) после выполнения преобразований получим

$$U_9^e - H_9^e = \frac{1}{2} \left(S_3 \int_0^l (u_{3x}'')^2 dx + S_1 \int_0^l (u_{1x}')^2 dx + S_{13} \int_0^l u_{3x}'' u_{1x}' dx \right) + \\ + P_3 E_3 \int_0^l u_{3x}'' dx + P_1 E_3 \int_0^l u_{1x}' dx - \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^S h_1 b l E_3^2,$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= \frac{b h_1 c_{11}^D}{3} (h_1^2 - 3 h_1 h_0 + 3 h_0^2) - \frac{k_{31}^2 b h_1 c_{11}^D}{4} (h_1 - 2 h_0)^2 + \\ &+ \frac{b c_2 h_2}{3} (h_2^2 + 3 h_0 h_2 + 3 h_0^2); \\ S_1 &= (1 - k_{31}^2) b c_{11}^D h_1 + b h_2 J; \\ S_{13} &= (1 - k_{31}^2) b h_1 c_{11}^D (h_1 - 2 h_0) + J b h_2 (h_2 + 2 h_0); \\ P_3 &= \frac{1}{2} (h_1 - 2 h_0) h_1 b e_{31}; \\ P_1 &= -b h_1 e_{31}, \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

$k_{31} = h_{31} e_{31} / c_{11}^D$ — коэффициент электромеханической связи пьезопластины.

Величина электрического поля E_3 может быть вычислена по формуле $E_3 = V_E / h_1$, где V_E — разность потенциалов на электродах пьезопластины.

Для определения неизвестной величины h_0 воспользуемся равенством изгибающих моментов по обе стороны нейтральной плоскости при изгибе КЭ:

$$b \int_0^{h_1-h_0} z \sigma_1(x, z) dz = b \int_{-h_0}^0 z \sigma_1(x, z) dz + b \int_{-(h_0+h_2)}^{-h_0} z \sigma_{n1}(x, z) dz. \quad (1.34)$$

Подставляя выражения $\sigma_1(x)$, $\sigma_{n1}(x)$ в (1.34), получаем уравнение, по которому точное определение h_0 весьма сложно. Значение h_0 зависит от соотношения $(\partial u_1 / \partial x) / (\partial^2 u_3 / \partial x^2)$ и от величины E_3 , т. е. не постоянно по длине КЭ. Однако для практических расчетов можно ограничиться значением h_0 , полученным в случае $\partial u_1 / \partial x = 0$. Тогда уравнение (1.34) переходит в уравнение для определения h_0 :

$$2\xi^3 + 3\xi^2 \left(1 - k_{31}^2 - \kappa \frac{J}{c_{11}^D} \right) + 3\xi \left(1 - k_{31}^2 + \kappa \frac{J}{c_{11}^D} \right) - 1 + \\ + \frac{3}{4} k_{31}^2 + \kappa^2 \frac{J}{c_{11}^D} = 0, \quad (1.35)$$

где $\xi = h_0 / h_1$, $\kappa = h_2 / h_1$.

Перейдем непосредственно к формированию матриц жесткости и масс КЭ. Вектором узловых перемещений является $\mathbf{U}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_j \end{pmatrix}$, где $\mathbf{U}_i^T = (U_1(0), U_3(0), U_{3x}'(0))$, $\mathbf{U}_j^T = (U_1(l), U_3(l), U_{3x}'(l))$.

Перемещения любой точки x КЭ выразим с помощью узловых перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= U_{i1} \mathcal{D}_1(x) + U_{j1} \mathcal{D}_4(x); \\ u_3(x) &= U_{i2} \mathcal{D}_2(x) + U_{j2} \mathcal{D}_3(x) + U_{j2} \mathcal{D}_5(x) + U_{j3} \mathcal{D}_6(x), \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

где в качестве функций формы $\vartheta_i(x) = \overline{1, 6}$ используются функции Эрмита нулевого и первого порядка:

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x) &= 1 - \frac{x}{l}; & \vartheta_2(x) &= 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3; \\ \vartheta_3(x) &= x - 2x^2/l + x^3/l^2; & \vartheta_4(x) &= x/l; & \vartheta_5(x) &= 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3; \\ & & \vartheta_6(x) &= -x^2/l + x^3/l^2.\end{aligned}$$

Подставив (1.36) в (1.32) и (1.33), получим

$$U_3^e - H_3^e = \frac{1}{2} \mathbf{U}^{eT} [\mathbf{K}^e] \mathbf{U}^e + \mathbf{U}^{eT} \mathbf{F}^e E_3; \quad (1.37)$$

$$T_3^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^{eT} [\mathbf{M}] \dot{\mathbf{U}}^e, \quad (1.38)$$

где $[\mathbf{K}^e] = [k_{ij}^e]$, $[\mathbf{M}^e] = [m_{ij}^e]$ — матрицы жесткости и масс КЭ соответственно; $\mathbf{F}^e = \mathbf{f}_i^e$ — вектор узловых усилий КЭ, обусловленных приложенным электрическим полем $E_3 = 1$.

Выражения элементов матриц и вектора имеют вид

$$k_{ij}^e = S_1 \int_0^l \vartheta_i'(x) \vartheta_j'(x) dx, \quad i, j = 1, 4;$$

$$k_{ij}^e = S_3 \int_0^l \vartheta_i''(x) \vartheta_j''(x) dx, \quad i, j = 2, 3, 5, 6;$$

$$k_{ij}^e = k_{ji}^e = \frac{1}{2} S_{13} \int_0^l \vartheta_i''(x) \vartheta_j'(x) dx, \quad i = 2, 3, 5, 6, \quad j = 1, 4;$$

$$m_{ij}^e = b(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \int_0^l \vartheta_i(x) \vartheta_j(x) dx, \quad i, j = 1, 4;$$

$$m_{ij}^e = b(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \int_0^l \vartheta_i(x) \vartheta_j(x) dx, \quad i, j = 2, 3, 5, 6;$$

$$f_i^e = P_3 \int_0^l \vartheta_i''(x) dx, \quad i = 2, 3, 5, 6;$$

$$f_i^e = P_1 \int_0^l \vartheta_i'(x) dx, \quad i = 1, 4.$$

Подставив выражения (1.37) и (1.38) в уравнение Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_3}{\partial \dot{U}_i} + \frac{\partial (U_3 - H_3)}{\partial U_i} = R_i^e, \quad i = \overline{1, 6},$$

получим систему уравнений динамического равновесия рассматриваемого КЭ, которая в матричной нотации имеет вид

$$[\mathbf{M}^e] \ddot{\mathbf{U}}^e + [\mathbf{K}^e] \mathbf{U}^e = -\mathbf{F}^e \frac{V_E}{h_1} + \mathbf{R}^e,$$

где $\mathbf{R}^e = \mathbf{R}_i^e$ — вектор внешних узловых сил, действующих на КЭ (включает в себя также и межузловые силы ансамбля КЭ).

Матрица демпфирования КЭ может быть получена по формуле (1.22).

При достаточно малом внутреннем сопротивлении подключенного к электродам источника питания напряжение на электродах V_E можно считать известным. Выполнив обычные операции трансформации структурных матриц КЭ к глобальным координатам и составив структурные матрицы ансамбля, можно решить задачу о колебаниях пьезопреобразователя в перемещениях. В противоположном случае необходимо определить проводимость каждого КЭ как элемента электрической цепи. Заряд на электродах КЭ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}Q^e &= \int_0^l \int_{-h_0}^{h_1-h_0} D_3 dz dx = -\frac{1}{2} e_{31} b h_1 (h_1 - 2h_0) \int_0^l u_{3x}'' dx + \\ &+ b h_1 e_{31} \int_0^l u_{1x}' dx + b l \varepsilon_{33}^S V_E.\end{aligned} \quad (1.39)$$

Синусоидальный переменный ток, протекающий через КЭ пьезопреобразователя,

$$I^e = j\omega Q^e = Y^e V_E, \quad (1.40)$$

где Y^e — проводимость КЭ.

Из уравнений (1.39) и (1.40) получим

$$Y^e = j\omega (\mathbf{F}^{eT} \mathbf{U}_*^e + b l \varepsilon_{33}^S),$$

где $\mathbf{U}_*^e$ — вектор узловых амплитуд колебаний при $V_E = \text{const}$.

Биморфный асимметричный КЭ в пространственной системе координат. В пространственной системе координат рассмотрим наиболее простой КЭ оболочки — плоский прямоугольный КЭ асимметричного биморфного пьезопреобразователя. Такой КЭ обладает суперпозицией свойств КЭ изгибаемой пластины и мембранного КЭ.

Поместим КЭ в локальную систему координат так, чтобы начало координат совпало с его нижним левым углом, а нейтральная плоскость — с плоскостью xOy (рис. 1.2, б). Предполагается, что $h_1 + h_2 \ll l$, $h_1 + h_2 \ll b$. Расстояние между нейтральной плоскостью и нижней гранью пьезопластины h_0 приближенно вычислим из уравнения (1.35). Приняв векторы электрического смещения и поля постоянными по толщине пьезопластины, а

пiezоматериал — изотропным в плоскости xOy , представим уравнения пьезоэффекта для пьезопластины в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(x, y, z) &= -h_{31}D_3(x, y) + c_{11}^D e_1(x, y, z) + c_{12}^D e_2(x, y, z); \\ \sigma_2(x, y, z) &= -h_{31}D_3(x, y) + c_{12}^D e_1(x, y, z) + c_{11}^D e_2(x, y, z); \\ \tau_{12}(x, y, z) &= c_{66}^D \gamma_{12}(x, y, z); \\ D_3(x, y) &= e_{31}\tilde{e}_1(x, y) + e_{31}\tilde{e}_2(x, y) + \varepsilon_{33}^S E_3(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

Деформации на высоте z над нейтральной плоскостью xOy определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} e_1(x, y, z) &= -z \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x}; \\ e_2(x, y, z) &= -z \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial u_2}{\partial y}; \\ \gamma_{12}(x, y, z) &= 2z \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

а средние деформации по толщине, аналогично (1.28), уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{e}_1(x, y) &= -\frac{1}{2}(h_1 - 2h_0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x}; \\ \tilde{e}_2(x, y) &= -\frac{1}{2}(h_1 - 2h_0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial u_2}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Напряжения в металлической пластинке определяются в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n1}(x, y, z) &= -c_{11}z \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} - c_{12}z \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial y}; \\ \sigma_{n2}(x, y, z) &= -c_{12}z \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} - c_{11}z \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + c_{11} \frac{\partial u_2}{\partial y}; \\ \tau_{n12}(x, y, z) &= c_{66} \left(2z \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

где c_{11} , c_{12} , c_{66} — коэффициенты тензора жесткости металла, $c_{11} = J/(1 - \nu^2)$, $c_{12} = \nu c_{11}$, $c_{66} = J/[2(1 + \nu)]$ (ν — коэффициент Пуассона).

Разность механической потенциальной и электрической энергий КЭ записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^e - \mathcal{H}^e &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\int_{-h_0}^{h_1-h_0} (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \gamma_{12} \tau_{12}) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-(h_0+h_2)}^{-h_0} (\sigma_{n1} e_1 + \sigma_{n2} e_2 + \tau_{n12} \gamma_{12}) dz \right) dy dx, \end{aligned} \quad (1.45)$$

а кинетическая энергия КЭ в виде

$$\tau^e = \frac{1}{2} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \int_0^a \int_0^b (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dy dx. \quad (1.46)$$

Учитывая (1.41) — (1.44), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^e - \mathcal{H}^e &= \int_0^a \int_0^b \left(P_{1x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + P_{2y} \frac{\partial u_2}{\partial y} + P_{3x} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + P_{3y} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) dy dx + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(S_{3x3x} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \right)^2 + S_{3y3y} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + S_{3x3y} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + S_{3xy3xy} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} \right)^2 + S_{1x1x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + S_{2y2y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + S_{1x2y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + S_{1y2x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + S_{3x1x} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + S_{3x2y} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + S_{3y1x} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + S_{3y2y} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + S_{3xy1y} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + S_{3xy2x} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right) dy dx - \frac{\varepsilon_{33}^S a b h_1}{2} E_3^2, \end{aligned}$$

где $S_{3x3x} = S_{3y3y} = \frac{1}{3} c_{11}^D h_1 (h_1^2 - 3h_1 h_0 + 3h_0^2) - \frac{1}{4} c_{11}^D k_{31}^2 (h_1 - 2h_0)^2 h_1 +$
 $+ \frac{J h_2}{3(1 - \nu^2)} (h_2^2 + 3h_0 h_2 + 3h_0^2); S_{3x3y} = \frac{2}{3} c_{12}^D h_1 (h_1^2 - 3h_1 h_0 + 3h_0^2) -$
 $- \frac{1}{2} c_{11}^D k_{31}^2 (h_1 - 2h_0)^2 h_1 + \frac{2\nu J c_{12} h_2}{3(1 - \nu^2)} (h_2^2 + 3h_0 h_2 + 3h_0^2); S_{1x1x} = S_{2y2y} =$
 $= c_{11}^D h_1 (1 - k_{31}^2) + \frac{J h_2}{1 - \nu^2}; S_{1x2y} = S_{1y2x} = 2(c_{12}^D h_1 - c_{11}^D h_1 k_{31}^2) + 2 \frac{J \nu}{1 - \nu^2} h_2;$
 $S_{3x1x} = S_{3x2y} = -c_{11}^D (1 - k_{31}^2) h_1 (h_1 - 2h_0) + \frac{J}{1 - \nu^2} h_2 (h_2 + 2h_0); S_{3x2y} =$
 $= S_{3y1x} = -(c_{12}^D - c_{11}^D k_{31}^2) h_1 (h_1 - 2h_0) + \frac{J \nu}{1 - \nu^2} h_2 (h_2 + 2h_0); S_{1y1y} = S_{2x2x} =$
 $= \frac{1}{2} S_{1y2x} = c_{66}^D h_1 + \frac{J}{2(1 + \nu)} h_2; S_{3xy1y} = S_{3xy1x} = 4 \left(h_1 (h_1 - 2h_0) c_{66}^D + \right.$
 $+ h_2 (h_2 + 2h_0) \frac{J}{2(1 + \nu)} \Big); S_{3xy3xy} = \frac{4}{3} \left(c_{66}^D h_1 (h_1^2 - 3h_1 h_0 + 3h_0^2) + \right.$
 $+ \frac{J h_2}{2(1 + \nu)} (h_2 + 3h_0 h_2 + 3h_0^2) \Big); P_{3x} = P_{3y} = h_1 (h_1 - 2h_0) e_{31}/2; P_{1x} =$
 $= P_{1y} = -e_{31} h_1.$

Перейдем к формированию матриц КЭ. Вектором узловых перемещений является

$$\mathbf{U}^e = \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \\ U_l \end{bmatrix}.$$

Здесь компонентами вектора являются

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^T &= (u_1(0, 0), u_2(0, 0), u_3(0, 0), \frac{\partial u_3(0, 0)}{\partial y}, -\frac{\partial u_3(0, 0)}{\partial x}, \theta_z(0, 0)); \\ \mathbf{U}_j^T &= (u_1(0, b), u_2(0, b), \dots); \\ \mathbf{U}_k^T &= (u_1(a, b), u_2(a, b), \dots); \\ \mathbf{U}_l^T &= (u_1(a, 0), u_2(a, 0), \dots), \end{aligned}$$

где θ_z обозначают тангенс угла поворота вокруг оси Oz в локальной системе координат. На этой стадии θ_z можно пренебречь, так как он не входит в число узловых параметров, определяющих деформации. Однако целесообразно уже сейчас учесть этот поворот и связать его с фиктивным моментом, так как эта степень свободы в каждом узле необходима при составлении ансамбля из некомпланарных КЭ. Тот факт, что θ_z не участвует в процессе минимизации функционала энергии, учитывается включением соответствующего количества нулей в матрицу жесткости.

Перемещения любой точки (x, y) КЭ выразим через значения узловых перемещений:

$$u_j(x, y) = \sum_i U_i \mathcal{U}_i(x, y), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.47)$$

причем индексы суммирования i берутся следующими: при $j=1$ $i=1, 7, 13, 19$; при $j=2$ $i=2, 8, 14, 20$; при $j=3$ $i=3, 4, 5, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 21, 22, 23$.

Номера индексов в суммах i обусловлены порядком расположения узловых перемещений в векторе узловых перемещений $\mathbf{U}^e$. Здесь $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_4$, $\mathcal{U}_5 = \mathcal{U}_6$, $\mathcal{U}_7 = \mathcal{U}_8$ являются двумерными функциями Эрмита нулевого порядка и используются для интерполяции мембранных перемещений внутри КЭ, а функции Эрмита с индексами, соответствующими последней сумме, — двумерными функциями Эрмита первого порядка и используются для интерполяции изгибных перемещений. Явные выражения этих функций будут приведены в следующей главе.

Подставив (1.47) в (1.45) и (1.46), получим

$$\mathcal{U}^e - \mathcal{H}^e = \frac{1}{2} \mathbf{U}^{eT} [\mathbf{K}^e] \mathbf{U}^e + \{\mathbf{U}^e\} \mathbf{F}^e E_3; \quad (1.48)$$

$$\tau^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^e [\mathbf{M}^e] \dot{\mathbf{U}}^e, \quad (1.49)$$

где $[\mathbf{K}^e] = [k_{ij}^e]$, $[\mathbf{M}^e] = [m_{ij}^e]$ — матрицы жесткости и масс КЭ соответственно, а $\mathbf{F}^e = \{f_i^e\}$ — вектор узловых усилий, обусловленных приложенным электрическим полем $E_3 = V_E/h_1$.

Выражения элементов матриц и вектора имеют вид

$$\begin{aligned} k_{ij}^e &= S_{3x3x} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ixx}'' \mathcal{U}_{jxx}'' dy dx + S_{3y3y} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{iyy}'' \mathcal{U}_{jyy}'' dy dx + \frac{1}{2} S_{3x3y} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ixx}'' - \\ &\quad - \mathcal{U}_{jxx}'' dy dx + S_{3xy3xy} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ixy}'' \mathcal{U}_{jxy}'' dy dx; \end{aligned}$$

$$m_{ij}^e = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j dy dx; \quad i, j = 3, 4, 5, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 21, 22, 23;$$

$$k_{ij}^e = S_{1x1x} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ix}' \mathcal{U}_{jx}' dy dx + S_{1y1y} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{iy}' \mathcal{U}_{jy}' dy dx;$$

$$m_{ij}^e = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j dy dx;$$

$$i, j = 1, 7, 13, 19;$$

$$k_{ij}^e = S_{2y2y} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{iy}' \mathcal{U}_{jy}' dy dx + S_{2x2x} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ix}' \mathcal{U}_{jx}' dy dx;$$

$$m_{ij}^e = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j dy dx;$$

$$i, j = 2, 8, 14, 20;$$

$$k_{ij}^e = k_{ji}^e = \frac{1}{2} S_{1x2y} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ix}' \mathcal{U}_{jy}' dy dx + \frac{1}{2} S_{1y2x} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{iy}' \mathcal{U}_{jx}' dy dx;$$

$$i = 1, 7, 13, 19; \quad j = 2, 8, 14, 20;$$

$$k_{ij}^e = k_{ji}^e = \frac{1}{2} S_{3x1x} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ixx}'' \mathcal{U}_{jx}' dy dx + \frac{1}{2} S_{3y1x} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{iyy}'' \mathcal{U}_{jx}' dy dx +$$

$$+ \frac{1}{2} S_{3xy1y} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ixx}'' \mathcal{U}_{jy}' dy dx; \quad i = 3, 4, 5, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 21, 22, 23;$$

$$j = 1, 7, 13, 19;$$

$$k_{ji}^e = k_{ij}^e = \frac{1}{2} S_{3x2y} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ixx}'' \mathcal{U}_{jy}' dy dx + \frac{1}{2} S_{3y2y} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{iyy}'' \mathcal{U}_{jy}' dy dx +$$

$$+ \frac{1}{2} S_{3xy2x} \int_0^a \int_0^b \mathcal{U}_{ixx}'' \mathcal{U}_{jx}' dy dx; \quad i = 3, 4, 5, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 21, 22, 23;$$

$$j = 2, 8, 14, 20;$$

$$f_i^e = P_{3x} \int_0^a \int_0^b \partial_{ixx}'' dy dx + P_{3y} \int_0^a \int_0^b \partial_{iyy}'' dy dx; i = 3, 4, 5, 9, 10, 11, 15, 17, 21, 22, 23;$$

$$f_i^e = P_{2x} \int_0^a \int_0^b \partial_{ix}' dy dx, i = 1, 7, 13, 19;$$

$$f_i^e = P_{2y} \int_0^a \int_0^b \partial_{iy}' dy dx, i = 2, 8, 14, 20.$$

Подставив (1.48) и (1.49) в уравнения Лангранжа II рода, получим систему дифференциальных уравнений для конечного элемента. С целью преодоления вычислительных трудностей, связанных с наличием нулевых строк и столбцов в структурных матрицах КЭ, введем коэффициенты жесткости, соответствующие углам поворота вокруг локальной оси Oz , согласно с рекомендациями [13]:

$$k_{ii}^e = 0,03 (c_{11}^D h_1 + c_{11}^D h_2) / (h_1 + h_2) ab;$$

$$m_{ii}^e = 0,03 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) / (h_1 + h_2) ab, i = 6, 12, 18, 24;$$

$$k_{ij}^e = -0,01 k_{ii}^e; m_{ij}^e = -0,01 m_{ii}^e, i = 6, 12, 18, 24, i \neq j.$$

Аналогично двумерному КЭ, может быть определена проводимость КЭ как элемента электрической цепи:

$$Y^e = j\omega (F^{eT} U_*^e + ab \varepsilon_{33}^S),$$

где U_*^e — вектор узловых амплитуд колебаний при $V_E = \cos \omega t$.

Глава 2

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ ВИБРОДВИГАТЕЛЕЙ

Вибродвигателями называются механизмы, превращающие высокочастотные колебания входного звена в шаговое или непрерывное движение выходного звена. Принцип их действия основан на процессе существенно нелинейного ударного или фрикционного контактного взаимодействия входного и выходного звеньев, поэтому исследование их динамики можно проводить в рамках существующей теории виброперемещения [4, 22].

Вибродвигатели обладают рядом особенностей, затрудняющих непосредственное применение теории виброперемещения для их анализа. Амплитуды колебаний входных звеньев вибродвигателей обычно малы (до нескольких микрометров), а частоты большие (десятки килогерц), поэтому в процессе взаимодействия входного звена с поверхностью выходного звена важную роль играет поверхностная упругость контактных пар. Практически время контактирования составляет большую часть периода колебаний, часто переходя в режим безотрывного контактирования. Следовательно, стереомеханическая модель уда-

ра, характеризующая коэффициентом восстановления скорости и предполагающая мгновенную продолжительность удара, во многих случаях непригодна для описания процессов контактирования в вибродвигателях, так как при этом необходимо учитывать локальные контактные явления.

Широкий обзор работ по теоретическому и экспериментальному исследованию вибродвигателей можно найти в работе [37]. Для получения адекватных математических моделей вибродвигателей как при аналитическом исследовании, так и при численном моделировании важное значение имеет правильный выбор модели контактирования входного и выходного звеньев. В работе [15] приведены наиболее принятые в настоящее время теории динамического контактного взаимодействия твердых тел наряду с обычными стереомеханическими моделями представлены волновая и локальная теории удара, а также теории, построенные на основе их комбинации. При описании вибродвигателей наиболее приемлемым представляется использование гипотезы упруговязкого поверхностного слоя или реологических моделей поверхностей взаимодействующих тел. В работе [25] на этой основе исследованы виброударные системы, а в работе [17] они применяются для исследования движения вибродвигателя, представленного математической моделью с сосредоточенными параметрами.

Использование МКЭ для исследования динамики вибродвигателей позволяет изучать вибродвигатели со сложной конфигурацией входного и выходного звеньев, а также учитывать наличие пьезоэффекта во входном звене пьезоэлектрического вибродвигателя. Здесь в первую очередь необходимо кратко остановиться на работах, относящихся к описанию контактного взаимодействия тел при помощи МКЭ.

Для описания ударного взаимодействия тел одним из подходов является использование мелкой сетки конечноэлементной дискретизации и отождествление нормальных перемещений узлов обоих тел на контактной поверхности. Такая модель, по существу, является аналогом волновой теории удара и более приемлема в случае массивных соударяющихся тел. В работе [30], наряду с конечноэлементной дискретизацией обоих контактирующих тел, используется гипотеза об упругом пограничном слое в зоне контакта. Такое представление приемлемо также в случае описания вибродвигателей, процесс контактирования в которых обусловлен микроперемещениями поверхностей.

В вибродвигателях наряду с деформацией поверхностного слоя также следует учитывать эффект контактирования звеньев под действием сил сухого трения. Деформацией поверхностного слоя обусловлено нами подразделение на вибродвигатели с непрерывным и дискретным контактом. В вибродвигателях с дискретным контактом подразумевается возможность контактирования звеньев лишь в дискретных точках входного звена при помощи прикрепленных к нему малых контактных

элементов. Локальные контактные явления можно считать независимыми в каждой точке контактирования.

Более сложны с точки зрения математического описания и построения программ моделирования вибродвигателя с непрерывным контактом, контактирование в которых происходит по определенной части поверхности звеньев. Динамика конечно-элементных моделей вибродвигателей с непрерывным и дискретным контактом при помощи МКЭ рассматривается в [9, 10, 11, 14].

В настоящей главе приводится формулировка общей задачи о движении конечноэлементной модели вибродвигателя в малых перемещениях и ее модификация в случае жесткого цилиндрического, сферического или прямолинейного выходного звена для конечных его перемещений. Формулировка задачи о движении вибродвигателя с дискретным контактом также приводится для случая абсолютно жесткого выходного звена. В п. 2.4 приведены основные величины, характеризующие работу вибродвигателя в шаговом режиме (режим конечных перемещений выходного звена при возбуждении входного звена отдельными импульсами или их пакетами) и в режиме непрерывного вращения при возбуждении входного звена вибродвигателя периодическим электрическим сигналом.

2.1. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ВИБРОДВИГАТЕЛЕЙ

Вибродвигатель с одной степенью свободы выходного звена. На рис. 2.1 приведена схема вибродвигателя, состоящего из входного звена — пьезокерамического вибропреобразователя и выходного звена — ротора, механическое контактирование между которыми осуществляется в точке i . Для простоты примем, что вся поверхность вибропреобразователя находится под электродами и при этом переменные потенциалы на электродах заданы. Тогда уравнения, описывающие приведенную модель вибродвигателя, записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} [M] \ddot{\mathbf{U}} + [C] \dot{\mathbf{U}} + [K] \mathbf{U} &= \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_i; \\ J \ddot{\psi} + b \dot{\psi} &= M_k; \\ \mathbf{F}_i &= \begin{pmatrix} \vdots \\ F_{iN}^{BA} \\ F_{iT}^{BA} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ -F_{iN}^{AB} \\ -F_{iT}^{AB} \\ \vdots \end{pmatrix}; \\ M_k &= R F_{iT}^{AB}; \\ F_{iT}^{AB} &= -k_c F_{iN} \operatorname{sign}(R \dot{\psi} - U_{iT}) 1(U_{iN}), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{F}(t)$ — вектор узловых усилий возбуждения вследствие подключенного электрического напряжения; $[M]$, $[C]$, $[K]$ — матрицы масс, демпфирования и жесткости конечноэлементной модели входного звена; $\mathbf{U}$ — вектор узловых перемещений входного звена; ψ — угол поворота выходного звена; M_k — крутящий момент вибродвигателя; F_{iT}^{AB} — сила тангенциального воздействия входного звена на выходное в точке контактирования; $\mathbf{F}_i$ — вектор узловых контактных усилий; i_N , i_T — номера степеней свободы конечноэлементной модели выходного звена, соответствующие нормальному и тангенциальному направлениям в точке контактирования; k_c — коэффициент сухого трения скольжения; J и R — момент инерции и радиус выходного звена соответственно; B — коэффициент вязкого сопротивления вращению выходного звена; $1(U_{iN})$ — единичная функция, характеризующая наличие контакта.

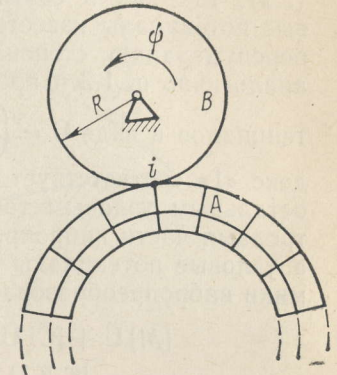


Рис. 2.1. Схема вибродвигателя с одной степенью свободы выходного звена

В случае наличия большого числа контактирующих узловых точек i , в последнем уравнении системы (2.1) надо брать сумму по всем контактирующим точкам i . Нелинейность системы (2.1) обусловлена сухим трением скольжения и возможностью нарушения контакта между звеньями в точке i . Осталась неопределенной сила нормального взаимодействия F_{iN}^{AB} . Для ее оценки могут быть использованы различные способы, подробно описанные в п. 2.2. Одним из возможных вариантов оценки F_{iN}^{AB} является применение предположения об упругом поверхностном слое в зоне контактирования:

$$F_{iN}^{AB} = k_{pi} \Delta^{\frac{2m+1}{2m}} + c_{pi} \dot{\Delta}^2 \operatorname{sign}(\dot{\Delta}); \quad m \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

где $\Delta = U_{pi} + U_{iN}$; U_{pi} — перемещение точки поверхностного слоя; k_{pi} , c_{pi} — коэффициенты жесткости и вязкого трения соответственно.

Вибродвигатель с несколькими степенями свободы выходного звена. Этот тип вибродвигателя позволяет получить движение выходного звена по нескольким независимым координатам, применив одно и то же входное звено — вибропреобразователь. Это большое преимущество данных вибродвигателей по сравнению с другими.

Система дифференциальных уравнений вибродвигателя с несколькими степенями свободы имеет вид

$$\left. \begin{aligned} [M] \ddot{\mathbf{U}} + [C] \dot{\mathbf{U}} + [K] \mathbf{U} &= \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_i; \\ [J] \{\ddot{\psi}\} + [b] \{\dot{\psi}\} &= \mathbf{M}_k; \\ \mathbf{F}(t) &= -[T] \Phi(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где $[J]$, $[b]$ — матрицы; ψ — вектор, представляющий движение выходного звена по нескольким независимым координатам; Φ — вектор потенциалов входного звена.

Остальные соотношения могут быть получены аналогично вышеизложенным, однако здесь более сложным и трудоемким является вычисление сближений контактирующих тел и определение разницы скоростей в точках контактирования.

Вибродвигатель с локализованными зонами возбуждения входного звена. В этом случае не вся поверхность вибропреобразователя находится под электродом, и для описания движения вибродвигателя нельзя сразу применять формулы (2.1) или (2.2), так как в соотношении $\mathbf{F}(t) = -[\mathbf{T}]\Phi(t)$ не все узловые потенциалы известны. С целью их определения осуществим перенумерацию степеней свободы конечноэлементной модели аналогично п. 1.2 и представим векторы узловых зарядов и потенциалов в виде $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$ и $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$, где индекс «1» соответствует узловым точкам на электродах, а «2» — остальным узловым точкам. Заряды $\mathbf{Q}_2$ на не покрытой электродами части вибропреобразователя можно принять нулевыми, а узловые потенциалы Φ_1 — заданными. Тогда уравнения динамики вибропреобразователя можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{U}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{U}} + [\mathbf{K}]\mathbf{U} + [\mathbf{T}_1]\Phi_1 + [\mathbf{T}_2]\Phi_2 &= \mathbf{F}; \\ [\mathbf{T}_1]^T \mathbf{U} - [\mathbf{S}_{11}]\Phi_1 - [\mathbf{S}_{12}]\Phi_2 &= \mathbf{Q}_1; \\ [\mathbf{T}_2]^T \mathbf{U} - [\mathbf{S}_{12}]^T \Phi_1 - [\mathbf{S}_{22}]\Phi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

В ходе несложных преобразований из последних двух уравнений системы (2.3) исключаются неизвестные узловые заряды и Φ_2 , и первое уравнение может быть представлено в виде

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{U}} + ([\mathbf{K}] + [\mathbf{T}_2][\mathbf{S}_{22}]^{-1}[\mathbf{T}_2]^T)\mathbf{U} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_i, \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{F}(t) = ([\mathbf{T}_2][\mathbf{S}_{22}]^{-1}[\mathbf{S}_{12}]^T - [\mathbf{T}_1])\Phi_1. \quad (2.5)$$

Заряд на электродах $\{Q_1\}$ при необходимости может быть вычислен по формуле

$$\mathbf{Q}_1 = ([\mathbf{T}_1]^T - [\mathbf{S}_{12}][\mathbf{S}_{22}]^{-1}[\mathbf{T}_2]^T)\mathbf{U} + ([\mathbf{S}_{12}][\mathbf{S}_{22}]^{-1}[\mathbf{S}_{12}]^T - [\mathbf{S}_{12}]^T)\Phi_1. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) — (2.6) в системы (2.1) или (2.2), получим системы дифференциальных уравнений движения вибродвигателя.

2.2. ВИБРОДВИГАТЕЛЬ С НЕПРЕРЫВНЫМ КОНТАКТОМ

Конечноэлементная модель для малых перемещений выходного звена. Рассмотрим вибродвигатель как систему двух контактирующих по некоторой части своих поверхностей тел A и B (рис. 2.2, а). Пусть тело B имеет одну или несколько степеней свободы движения как абсолютно жесткое тело, назовем его выходным звеном вибродвигателя. При этом тело A примем закрепленным, т. е. не имеющим степеней свободы жесткого

тела, и назовем его входным звеном вибродвигателя. Приведем формулировку задачи в малых перемещениях, т. е. примем, что амплитуда колебаний любой точки входного или выходного звена, а также перемещение любой точки выходного звена за счет его движения как абсолютно жесткого тела значительно меньше межузловых расстояний конечноэлементной модели.

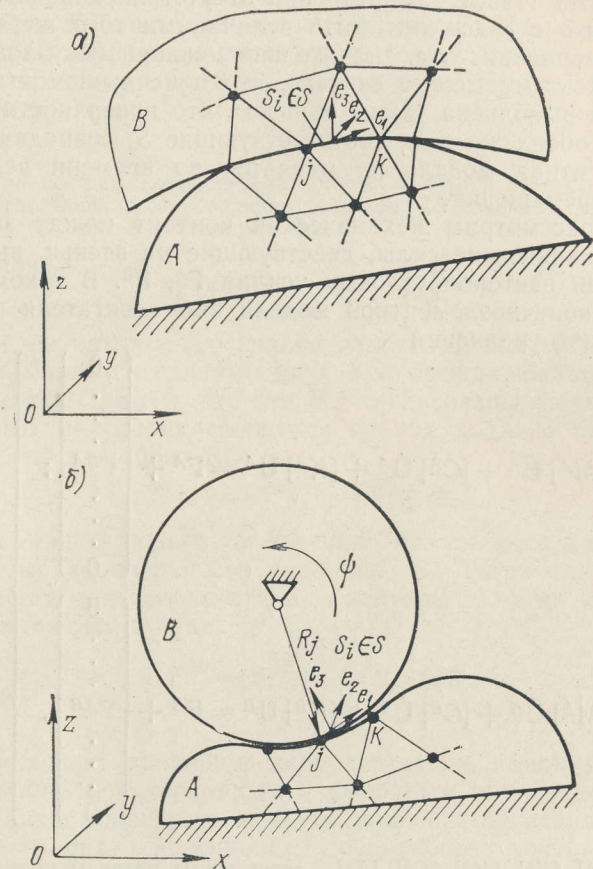


Рис. 2.2. Схема вибродвигателя с непрерывным контактом с малыми перемещениями выходного звена (а) и с одной степенью свободы выходного звена для конечных перемещений (б)

Часть площади поверхности, по которой возможно контактирование между звеньями, обозначим S и будем считать ее непрерывной. Предположение о непрерывности S не уменьшает общности постановки задачи, так как в противоположном случае возможно введение конечного числа таких поверхностей, для каждой из которых справедливы приводимые ниже рассуждения.

Контактирование в каждой точке площади поверхности S в произвольный момент времени необязательно, однако возможно вследствие малых перемещений поверхностных точек звеньев вибродвигателя, поэтому и употребляется понятие «возможное контактирование». Определим на поверхности S функцию $g(x, y, z)$, означающую начальное расстояние между поверхностными точками звеньев при отсутствии колебаний. Значения $|g(x, y, z)|$ должны быть величинами того же порядка, что и перемещения, т. е. значительно меньше межузловых расстояний. Поэтому можно считать, что конечноэлементная дискретизация выполнена таким образом, что поверхностные узловые точки обоих звеньев, соответствующие S , совпадают, и конечноэлементная модель не меняется во времени вследствие малости перемещений.

Затем рассмотрим механический контакт между звеньями. Электромеханические силы, действующие на звенья, выражаем при помощи векторов узловых усилий F^A , F^B . В таком случае динамика конечноэлементной модели вибродвигателя описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} [M^A] \ddot{U}^A + [C^A] \dot{U}^A + [K^A] U^A &= F^A + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} F^{BA}; \\ [M^B] \ddot{U}^B + [C^B] \dot{U}^B + [K^B] U^B &= F^B + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} F^{AB}, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где $[M^A]$, $[C^A]$, $[K^A]$, $[M^B]$, $[C^B]$, $[K^B]$ — структурные матрицы масс, демпфирования и жесткости входного и выходного звеньев соответственно; U^A , U^B — векторы узловых перемещений, F^A , F^B — векторы узловых усилий, обусловленные всеми электромеханическими силами, действующими на звенья, кроме сил контактного взаимодействия; F^{AB} , F^{BA} — векторы узловых усилий, обусловленные силами контактного взаимодействия.

Запись вторых слагаемых в правой стороне системы уравнений (2.7) означает, что компоненты F^{AB} , F^{BA} распределены по всей длине вектора узловых усилий входного или выходного звена согласно нумерации узлов. Неучет электрических и тепловых величин в системе (2.7) не имеет отношения к приводимому ниже выводу уравнений механического взаимодействия, и при необходимости система (2.7) может быть дополнена не-

достающими членами и уравнениями аналогично вышеприведенному.

Заметим, что систему (2.7) нельзя решить, не определив векторов узловых сил контактного взаимодействия F^{AB} и F^{BA} . Поэтому необходимо исследовать условия равновесия на поверхности контактирования. С целью учета локальных контактных явлений примем гипотезу о существовании вязкоупругого поверхностного слоя между контактирующими поверхностями обоих тел. В случае ничтожно малой толщины этого слоя можно принять, что сумма действующих на поверхности сил должна быть нулевой, т. е.

$$f^{AB} + f^{BA} = 0,$$

где f^{AB} , f^{BA} — векторы, компонентами которых являются контактные напряжения в направлениях осей координат (индексы AB означают, что силы действуют от точки тела A к точке тела B).

Обозначим

$$f = f^{BA} = -f^{AB}, \in S.$$

Затем рассмотрим i -ю подповерхность $S_i \in S$, образованную соприкасающимися гранями двух КЭ, принадлежащих различным звеньям. Примем, что эти КЭ согласованы, поэтому функции формы на соприкасающихся гранях должны быть равны между собой для обоих КЭ:

$$[N^A]_i = [N^B]_i = [N]_i, \in S_i.$$

Здесь нижний индекс « i » означает, что имеются в виду функции формы на поверхности площадью S_i . Тогда вклады F^{AB} и F^{BA} площади подповерхности S_i в векторы узловых усилий F^{AB} , F^{BA} записываются в виде

$$-F_i^{AB} = F_i^{BA} = \int_{S_i} [N]_i^T f dS. \quad (2.8)$$

Так как при движении вибродвигателя имеет место проскальзывание между входным и выходным его звеньями, необходимо также подвергать анализу движение пограничного слоя, который в силу конечности поверхности контактирования нельзя представить в виде обычной реологической модели с сосредоточными параметрами. Для изучения движения такого пограничного слоя целесообразно его также описать в виде конечноэлементной модели, обладающей жесткостью и вязким трением в нормальном и тангенциальном направлениях, причем перемещения в любом из направлений обычно принимаются независимыми.

Площадь подповерхности S_i нулевой толщины будем считать i -м КЭ пограничного слоя. В каждой точке S_i выберем локальную прямоугольную систему координат (e_1, e_2, e_3) , третья ось которой перпендикулярна S_i и направлена от звена A к звену B . Перемещения в этой локальной системе координат обозначим

$$\delta^n = \begin{pmatrix} \delta_1^n \\ \delta_2^n \\ \delta_3^n \end{pmatrix}, \text{ и пусть они связаны с перемещениями в глобальной}$$

$$\text{ной системе координат } u^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{pmatrix} \text{ соотношением}$$

$$\delta^n = [a] u^n,$$

где $[a]$ — матрица направляющих косинусов.

Деформации ε пограничного слоя в любой точке КЭ в локальной системе координат представим соотношениями

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial e_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial e_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta^n, \quad (2.9)$$

а напряжения — соотношениями

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \varepsilon = [D] \varepsilon, \quad (2.10)$$

где d_s — коэффициент жесткости пограничного слоя, $s = \overline{1, 3}$.

Мы не рассматриваем деформаций и напряжений сдвига в пограничном слое $\gamma_{rs}, \tau_{rs}, r, s = \overline{1, 3}$, так как на практике для учета упругих свойств поверхностного слоя обычно достаточно соотношений (2.9) и (2.10). К тому же, определение реальных величин элементов $[D]$ часто возможно лишь приближенно. Однако в случае необходимости в (2.9) и (2.10) можно ввести в рассмотрение сдвиговые напряжения и деформации, а также соответствующие коэффициенты жесткости.

Для интерполяции межузловых значений перемещений пограничного слоя используем те же функции формы $[N]_i$:

$$u^n = [N]_i U^n, \in S_i.$$

Так как функции формы заданы в глобальной системе координат, в дальнейшем удобно матрицу дифференцирования из (2.9) также представить в глобальных переменных:

$$[A] = \begin{bmatrix} b_{11} \frac{\partial}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial}{\partial y} + b_{13} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} \frac{\partial}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial}{\partial y} + b_{23} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $b_{ij}, i, j = \overline{1, 3}$ являются элементами матрицы $[b] = [a]^{-1}$.

Приняв $[B]_i = [A][a][N]_i$ и используя формулы (1.19), запишем выражение матрицы жесткости i -го КЭ пограничного слоя:

$$[K^n]_i = \int_{S_i} [B]_i^T [D] [B]_i dS,$$

причем интегрирование выполняется в глобальной системе координат.

Обозначив

$$[H] = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix},$$

где $\mu_s, s = \overline{1, 3}$ — коэффициенты демпфирования пограничного слоя в направлениях локальных осей, запишем выражение матрицы демпфирования КЭ:

$$[C^n]_i = \int_{S_i} [N]_i^T [a]^T [H] [a] [N]_i dS.$$

Полученные после составления матриц ансамбля матрицы жесткости и демпфирования пограничного слоя обозначим $[K^n]$ и $[C^n]$. Вернемся теперь к определению контактных напряжений f и соответствующих векторов узловых усилий. Опять рассмотрим ту же пару КЭ, образующую КЭ пограничного слоя S_i , в каждой точке которого определена локальная система координат (e_1, e_2, e_3) .

Контактные напряжения p и перемещения поверхностных точек входного и выходного звеньев δ^A, δ^B в локальной системе координат связаны с соответствующими величинами в глобальной системе координат соотношениями

$$p = [a] f; \delta^A = [a] U^A; \delta^B = [a] U^B.$$

В случае контактирования перемещение любой точки пограничного слоя в нормальном направлении обусловлено взаимным перемещением соответствующих точек входного и выходного звеньев в нормальном направлении. Единичную функцию, определяющую наличие или отсутствие контактирования в точке поверхности S , можно записать в виде

$$1(U^A, U^B, U^n, g, p_3) = \begin{cases} 1, & \text{при } ([a]_3 (U^B - U^A - U^n) + g \leq 0) \cap (p_3 < 0); \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\cap$ — логическая дизъюнкция.

Тогда для площади поверхности контактирования S должны выполняться уравнения

$$1(U^A, U^B, U^n, g, p_3) ([a]_3 (U^B - U^A - U^n) + g) = 0; \quad (2.11)$$

$$p_3 = 1(U^A, U^B, U^n, p_3) (U^n d_3 + \dot{U}^n \mu_3). \quad (2.12)$$

Здесь $[a]_3$ означает третью сторону матрицы $[a]$.

Приняв, что при проскальзывании поверхностей действуют лишь силы сухого трения с коэффициентом k_c , запишем выражения для тангенциальных напряжений p_1, p_2 :

$$p_1 = p_3 k_c \text{sign}(\dot{\delta}_s^B - \dot{\delta}_s^A - \dot{\delta}_s^n), \quad s = 1, 2. \quad (2.13)$$

Учет сил вязкого трения скольжения при помощи дополнительного члена $k_c p_3 (\dot{\delta}_3^A - \dot{\delta}_3^B - \dot{\delta}_3^n)$ в правой части (2.13) не меняет сущности дальнейшего изложения.

Запишем уравнения (2.11)–(2.13) в j -й узловой точке поверхности. Узловое значение функции g обозначим через G^j , векторы узловых перемещений узла через $U^{n,j}$, $U^{A,j}$, $U^{B,j}$, векторы узловых значений контактных напряжений через $P^j =$

$$= \begin{pmatrix} P_1^j \\ P_2^j \\ P_3^j \end{pmatrix} \text{ и значение матрицы } [a] \text{ в } j\text{-й узловой точке — через } [a]^j. \text{ Тогда уравнения (2.11)–(2.13) соответственно преобразуются в следующие:}$$

$$1(U^{B,j}, U^{A,j}, U^{n,j}, G^j, P_3^j)([a]_3^j(U^{B,j} - U^{A,j} - U^{n,j}) + G^j) = 0;$$

$$P_3^j = [a]_3^j(U^{n,j} d_3 + \dot{U}^{n,j} \mu_3) 1(U^{B,j}, U^{A,j}, U^{n,j}, G^j, P_3^j);$$

$$P_s^j = P_3^j k_c \text{sign}([a]_s^j(\dot{U}^{B,j} - \dot{U}^{A,j} - \dot{U}^{n,j})), \quad s = 1, 2.$$

Контактные напряжения в любой точке поверхности КЭ

$$\{f\} = [N]_i [a_{Si}^*] P_i. \quad (2.14)$$

Здесь $[a_{Si}^*]$ является блочной матрицей вида

$$[a_{Si}^*] = \begin{bmatrix} [a]^j & 0 & 0 \\ 0 & [a]^k & 0 \\ 0 & 0 & [a]^e \end{bmatrix},$$

где узлы $j \in S_i$, $k \in S_i$, $l \in S_i$, а $P_i = \begin{pmatrix} P^j \\ P^k \\ P^l \end{pmatrix}$ — вектор узловых напряжений

КЭ S_i .

Подставляя (2.14) в (2.8), получим

$$F_i^{BA} = \int_{S_i} [N]_i^T [N]_i [a_{Si}^*] dS_i P_i.$$

Обозначим

$$[T_n]_i = \int_{S_i} [N]_i^T [N]_i [a_{Si}^*] dS_i.$$

Нетрудно заметить, что после составления из матриц $[T_n]_i$ матрицы ансамбля $[T_n]$ для всей конечноэлементной модели пограничного слоя справедливо равенство

$$[T_n] P = F^{BA}.$$

Запишем полученную систему дифференциальных уравнений движения конечноэлементной модели вибродвигателя:

$$\left. \begin{aligned} [M^A] \ddot{U}^A + [C^A] \dot{U}^A + [K^A] U^A &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} + F^A; \\ [M^B] \ddot{U}^B + [C^B] \dot{U}^B + [K^B] U^B &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} + F^B; \\ [C^n] \dot{U}^n + [K^n] U^n &= F^{BA}; \\ F^{BA} &= -F^{AB} = [T_n] P, \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

и для каждого узла $j \in S_i$ должны выполняться условия:

$$\left. \begin{aligned} 1(U^{B,j}, U^{A,j}, U^{n,j}, G^j, P_3^j)([a]_3^j(U^{B,j} - U^{A,j} - U^{n,j}) + G^j) &= 0; \\ P_3^j &= [a]_3^j(U^{n,j} d_3 + \dot{U}^{n,j} \mu_3) 1(U^{B,j}, U^{A,j}, U^{n,j}, G^j, P_3^j); \\ P_s^j &= P_3^j k_c \text{sign}([a]_s^j(U^{B,j} - U^{A,j} - U^{n,j})), \quad s = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Полученная система дифференциальных уравнений является существенно нелинейной, и ее решения обычно не удается найти другим путем, кроме численного интегрирования. После получения решения системы (2.15)–(2.16) в каждый момент времени в виде векторов узловых перемещений остается выделить составляющую движения выходного звена как абсолютно жесткого тела. Это нетрудно сделать путем представления его перемещения U^B в координатах собственных векторов, т. е. в виде

$$U^B = [\Delta^B] Z^B,$$

где $[\Delta^B]$ — матрица, содержащая собственные векторы выходного звена B по столбцам, полученная при решении задачи о собственных значениях

$$\det[K^B - \omega^2 M^B] = 0. \quad (2.17)$$

Первые m столбцов матрицы $[\Delta^B]$ обозначим $V_1, V_2, \dots, V_m$, причем m равна числу степеней свободы выходного звена как абсолютно жесткого тела. Очевидно, $1 \leq m \leq 6$. Используя то обстоятельство, что соответствующие векторы в $[\Delta^B]$ нормированы, т. е.

$$[\Delta^B]^T [M^B] [\Delta^B] = [I],$$

где $[I]$ обозначает единичную матрицу, получим

$$Z = [\Delta^B]^T [M] {}^B U^B.$$

Тогда составляющая движения выходного звена по k -й степени свободы абсолютно жесткого тела может быть представлена в виде $V_k z_k^B$, а суммарное его «жесткое» движение — в виде

$$U_*^B = \sum_{k=1}^m z_k^B V_k,$$

где z_k^B — k -й элемент вектора Z^B .

К тому же нужно отметить, что нет необходимости явно решать задачу (2.17), так как первые m собственных вектора могут быть сформированы искусственно, т. е. с помощью соотношений аналитической геометрии путем вычисления векторов, представляющих перемещения, параллельные осям координат, и повороты вокруг осей координат без деформации тела.

Так как начальные условия обычно вычисляются из системы конечноэлементных уравнений, описывающих статическое деформированное состояние звеньев, иногда возникают затруднения, вызванные вырожденностью матрицы жесткости незакрепленного выходного звена. Поэтому в таких случаях приходится тем или иным способом временно исключить степени свободы движения жесткого тела, например путем введения фиктивных закреплений в точках, неподвижность которых очевидна по физическому смыслу или путем перехода в координаты нормированных собственных векторов и исключением из рассмотрения мод, представляющих движение выходного звена как абсолютно жесткого тела.

Систему уравнений (2.15) — (2.16) удастся решить с удовлетворительной точностью, если значения коэффициентов жесткости в $[D]$ не слишком велики (практически максимально возможное соотношение их с приведенным коэффициентом жесткости самого деформируемого тела в точке контактирования обусловлено количеством значащих цифр в мантиссе машинного слова ЭВМ и продолжительностью интервала времени, в котором необходимо получить решение). В случае больших значений коэффициентов жесткости целесообразно положить

$$U^{\pi I} = 0,$$

т. е. отказаться от гипотезы поверхностного слоя и вводя тем самым ограничения в систему (2.15) — (2.16). Определение огра-

ничений в случае плоской поверхности контактирования не представляет собой затруднений, однако для кривых поверхностей оно может оказаться весьма сложным. Не будем далее останавливаться на этом вопросе, тем более, что в задачах о движении вибродвигателей гипотеза пограничного слоя не используется.

Конечноэлементная модель для конечных перемещений выходного звена. Рассмотрим характерный частный случай постановки задачи о движении вибродвигателя, в котором выходное звено предполагается недеформируемым, в форме цилиндрического ротора, вращающегося вокруг своей оси (рис. 2.2, б), что часто встречается на практике. Вследствие неизменности координат поверхности выходного звена при его вращении такая модель вибродвигателя пригодна и для конечных перемещений выходного звена.

Поместим вибродвигатель в прямоугольную систему координат таким образом, чтобы ось вращения выходного звена была бы параллельна оси Oy . Радиус ротора обозначим $r(y)$, т. е. примем его переменным в направлении оси вращения. Так как выходное звено в настоящем случае недеформируемо, исключим из рассмотрения матрицы $[M^B]$, $[C^B]$, $[K^B]$. Угол поворота выходного звена обозначим ψ и примем за положительное направление его вращения против часовой стрелки.

Тогда систему дифференциальных уравнений, описывающую движение такого вибродвигателя, можно записать на основе (2.15) — (2.21), учитывая, что в каждой узловой точке поверхности

$$U^{BI} = ([a]^I)^{-1} \begin{Bmatrix} R^I \psi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

где R^I — значение радиуса выходного звена, соответствующее узловой точке i пограничного слоя.

Кроме того, к системе необходимо добавить еще одно уравнение, описывающее движение выходного звена как жесткого тела:

$$J \ddot{\psi} + c(\dot{\psi}) = -M_c + M_k,$$

где J — момент инерции выходного звена вокруг оси вращения; $c(\dot{\psi})$ — функция, описывающая закон сопротивления вращению; M_c — момент сопротивления вращению выходного звена; M_k — крутящий момент, вычисляемый по формуле

$$M_k = \sum_i \int_{S_i} r p_i dS = \sum_i \int_{S_i} r [a]_i f dS. \quad (2.18)$$

Сумма в (2.18) берется по всем КЭ $S_i \in S$. Подставляя (2.14) в (2.18), получим

$$M_k = \sum_i \left(\int_{S_i} r [a]_i [N]_i [a_{Si}^*] dS p_i \right).$$

Крутящий момент без значительной погрешности можно выразить через узловые значения контактных сил

$$M_k \approx \sum_{j \in S} R^j [a]^j F^{ABj},$$

где сумма берется по всем узлам $j \in S$.

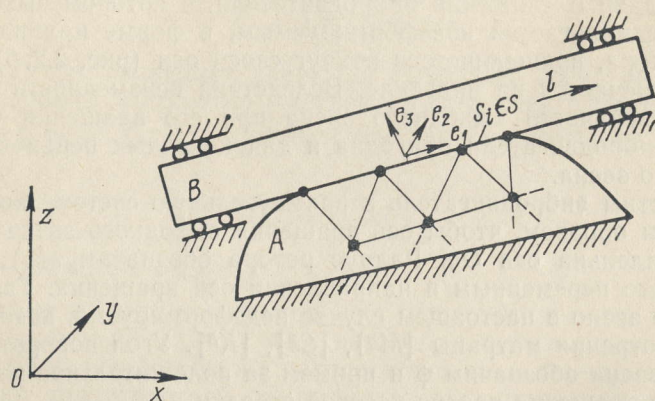


Рис. 2.3. Схема линейного вибродвигателя

Окончательно получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} [M^A] \ddot{U}^A + [C^A] \dot{U}^A + [K^A] U^A &= F^A + \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F^{BA} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ [C^n] \dot{U}^n + [K^n] U^n &= F^{BA}, \\ F^{BA} = -F^{AB} &= [T_n] P; \\ J \ddot{\psi} + c(\dot{\psi}) &= -M_c + \sum_{j \in S} R^j [a]^j F^{ABj}, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

и для каждого узла $j \in S$ должны выполняться условия

$$\left. \begin{aligned} 1(0, U^{Aj}, U^{Bj}, G^j, P_3^j) &(-[a]_3^j (U^{Aj} + U^{Bj}) + G^j) = 0; \\ P_3^j &= [a]_3^j (U^{Bj} d_3 + \dot{U}^{Bj} \mu_3) 1(0, U^{Aj}, U^{Bj}, G^j, P_3^j); \\ P_1^j &= P_3^j k_c \operatorname{sign}(R^j \dot{\psi} - [a]_1^j (\dot{U}^{Aj} + \dot{U}^{Bj})); \\ P_2^j &= P_3^j k_c \operatorname{sign}(-[a]_2^j (\dot{U}^{Aj} + \dot{U}^{Bj})). \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Аналогично можно представить и систему дифференциальных уравнений, описывающую линейный вибродвигатель, выходное звено которого имеет одну степень свободы прямолинейного перемещения (рис. 2.3). В таком случае в каждой точке контактирования локальная система координат должна быть выбрана таким образом, чтобы ось Oe_1 была бы параллельна направлению движения выходного звена. Для описания движения такого вибродвигателя может быть также использована система (2.19) — (2.20), подставив вместо ψ линейное перемещение l , приравняв $R^j = 1$, $j \in S$ и третье уравнение системы (2.19) заменив на

$$m \ddot{l} + c(\dot{l}) = -F_c + \sum_i [a]^i F^{ABi},$$

где m — масса выходного звена; F_c — сила сопротивления движению выходного звена.

2.3. ВИБРОДВИГАТЕЛЬ С ДИСКРЕТНЫМ КОНТАКТОМ

Рассмотрим вибродвигатель, контактирование между звеньями которого осуществляется в дискретных точках входного звена при помощи малых контактных элементов (рис. 2.4). Отличительной особенностью при описании таких вибродвигате-

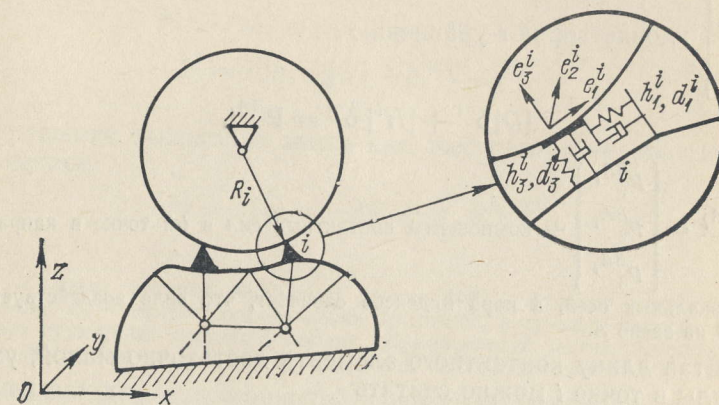


Рис. 2.4. Вибродвигатель с дискретным контактом

лей, по сравнению с вибродвигателями с непрерывным контактом, является независимость контактных явлений в каждой из точек контактирования. Поэтому при описании поведения поверхностного слоя окрестность каждой точки может быть представлена реологической моделью косо́го удара с сосредоточенными параметрами. Для этого можно использовать различные реологические модели [25]. Выберем модель, состоящую из параллельно соединенных пружины и демпфера в нормальном и тангенциальном направлениях. Примем также, что выходное

звено недеформируемо и имеет форму цилиндра, радиус которого может быть переменным в направлении оси вращения.

Не уменьшая общности, можно принять конечноэлементную дискретизацию входного звена выполненной таким образом, что места крепления контактных элементов совпадают с узловыми точками. В каждой i -й дискретной точке контактирования введем локальную прямоугольную систему координат (e_1^i, e_2^i, e_3^i) таким образом, чтобы ось $O^i e_3^i$ была перпендикулярна контактирующим поверхностям и направлена от входного звена A к выходному звену B , а ось $O^i e_2^i$ — параллельна оси вращения выходного звена.

Матрицы коэффициентов жесткости и вязкого трения реологической модели в точке i в направлениях осей локальной системы координат обозначим:

$$[D]^i = \begin{bmatrix} d_1^i & 0 & 0 \\ 0 & d_2^i & 0 \\ 0 & 0 & d_3^i \end{bmatrix}; \quad [H]^i = \begin{bmatrix} h_1^i & 0 & 0 \\ 0 & h_2^i & 0 \\ 0 & 0 & h_3^i \end{bmatrix}.$$

Тогда локальные перемещения реологической модели $\delta^{pi} = \begin{bmatrix} \delta_1^{pi} \\ \delta_2^{pi} \\ \delta_3^{pi} \end{bmatrix}$ удовлетворяют уравнению

$$[D]\delta^{pi} + [H]\dot{\delta}^{pi} = P^{BAi},$$

где $P^{BAi} = \begin{bmatrix} P_1^{BAi} \\ P_2^{BAi} \\ P_3^{BAi} \end{bmatrix}$ — компоненты контактных сил в i -й точке в направле-

ниях локальных осей, а пара индексов означает, что сила воздействует от звена B на звено A .

Считая длину контактного элемента достаточно малой, узловые силы в точке i можно считать

$$P^{BAi} = -P^{ABi}.$$

Пусть структурные матрицы входного звена A $[M^A]$, $[C^A]$, $[K^A]$, векторы узловых перемещений i -й узловой точки входного звена и соответствующей i -й реологической модели в глобальной системе координат — U^{Ai} , U^{pi} , а в локальной системе — δ^{Ai} , δ^{pi} , расстояние между контактным элементом и поверхностью выходного звена в i -й узловой точке — G^i , векторы контактных узловых сил — F^{BAi} , F^{ABi} . Обозначив через $[a]^i$ матрицу направляющих косинусов, трансформирующую координаты вектора из локальной системы (e_1^i, e_2^i, e_3^i) в глобальную (x, y, z) ,

можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \delta^{pi} &= [a]^i U^{pi}; \\ \delta^{Ai} &= [a]^i U^{Ai}; \\ F^{ABi} &= [a]^i P^{ABi}; \\ F^{BAi} &= [a]^i P^{BAi}. \end{aligned}$$

Единичная функция, описывающая наличие контакта в i -й точке, имеет вид

$$1(\delta_3^{Ai}, \delta_3^{pi}, G^i, P_3^i) = \begin{cases} 1, & \text{при } (-\delta_3^{Ai} - \delta_3^{pi} + G^i < 0) \cap (P_3^i < 0); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда в контактной точке i должны выполняться условия

$$\left\{ \begin{aligned} 1(\delta_3^{Ai}, \delta_3^{pi}, G^i, P_3^i)(-\delta_3^{Ai} - \delta_3^{pi} + G^i) &= 0; \\ P_3^i &= (\delta_3^{pi} d_3^i + \delta_3^{Ai} h_3^i) 1(\delta_3^{Ai}, \delta_3^{pi}, G^i, P_3^i); \\ P_1^i &= P_3^i k_c \operatorname{sign}(R^i \psi - \delta_1^{Ai} - \delta_1^{pi}); \\ P_2^i &= P_3^i k_c \operatorname{sign}(-\delta_1^{Ai} - \delta_1^{pi}). \end{aligned} \right.$$

Вращение выходного звена как жесткого тела описывается уравнением

$$J\ddot{\psi} + c(\psi) = -M_c + \sum_i R^i P_1^{ABi},$$

где J — момент инерции выходного звена; $c(\psi)$ — функция сопротивления вращению; M_c — момент сопротивления вращению, а сумма в правой стороне означает суммарный крутящий момент, обусловленный тангенциальными контактными силами во всех точках крепления контактных элементов.

Система дифференциальных уравнений движения вибродвигателя с дискретным контактом имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} [M^A]\ddot{U}^A + [C^A]\dot{U}^A + [K^A]U^A &= F^A + \sum_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_1^{BAi} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \\ J\ddot{\psi} + c(\psi) &= -M_c \operatorname{sign} \dot{\psi} + \sum_i R^i P_1^{ABi} \end{aligned} \right. \quad (2.21)$$

и для каждого контактного элемента i должны выполняться условия:

$$\left. \begin{aligned} [D^i] \delta^{ni} + [H^i] \delta^{ni} &= P^{BAi}; \\ F^{BAi} &= -F^{ABi} = [a] P^{BAi}; \\ 1 (\delta_3^{Ai}, \delta_3^{ni}, G^i, P_3^i) (-[a]_3^i (U^{Ai}) - \delta_3^i + G^i) &= 0 \\ P_3^i &= (\delta_3^{ni} d_3^i + \delta_3^{ni} h_3^i) 1 (\delta_3^{Ai}, \delta_3^{ni}, G^i, P_3^i); \\ P_1^i &= P_3^i k_c \operatorname{sign} (R^i \dot{\psi} - [a]_1^i U^{Ai} - \delta_1^{ni}); \\ P_2^i &= P_3^i k_c \operatorname{sign} (-[a]_1^i U^{Ai} - \delta_1^{ni}). \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Знак суммы в (2.21) означает суммирование по всем контактным элементам.

Заметим, что приведенная система уравнений (2.21) — (2.22) пригодна также для описания конечных поворотов выходного звена в силу неизменности координат поверхности выходного звена при его повороте.

При численном решении системы использованные в (2.22) функции sign иногда не позволяют получить удовлетворительной сходимости процесса численного интегрирования. Поэтому целесообразно привести следующий вид уравнений для описания сил тангенциального взаимодействия, учитывающий кинематическую связь между перемещениями реологической модели в тангенциальном направлении и перемещением поверхности выходного звена при достаточно больших нормальных усилиях. Например, пятое условие системы (2.22) может быть заменено следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} R^i d\dot{\psi} - [a]_1^i dU^{Ai} &= d\delta_1^{ni}, \text{ при } |P_1^i| \leq k_c P_3^{ABi}; \\ P_1^i &= k_c P_3^{ABi} \operatorname{sign} P_1^{i*}, \\ \text{принимая в момент начала скольжения} \\ P_1^{i*} &= P_1^i |_{R^i d\dot{\psi} - [a]_1^i dU^{Ai} = d\delta_1^{ni}}, \end{aligned} \right\}$$

где вертикальная черта означает «вычислено при условии», а d означает дифференциал.

Аналогично предыдущему параграфу, в случае слишком больших значений коэффициентов жесткости $[D]$, можно отказаться от рассмотрения реологических моделей и положить для всех i

$$\delta^{ni} = 0,$$

тем самым вводя в систему (2.21) — (2.22) ограничение

$$[a]_3^i U^A \leq G^i.$$

В заключение отметим, что в определенной степени примитивным, но зачастую весьма эффективным способом оказыва-

ется использование модели с дискретным контактом для описания вибродвигателей с непрерывным контактом. Данный подход основывается на предположении, что контактные напряжения действуют в узловых точках, как сосредоточенные силы, т. е. строится модель с дискретным контактом в каждой узловой точке поверхности контактирования. Такая модель значительно удобнее для программирования, особенно в случае кривых контактных поверхностей, и при надлежащем подборе параметров реологических моделей дает удовлетворительные результаты.

2.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ РАБОТЫ ВИБРОДВИГАТЕЛЕЙ

Для оценки качества работы вибродвигателей необходимо использование их динамических характеристик. Обычно расчет вибродвигателей осуществляется для определения характеристик в двух различных режимах — непрерывного движения и шагового. Под режимом непрерывного движения вибродвигателя понимается движение выходного звена вибродвигателя, входное звено которого возбуждается периодическим электрическим сигналом — импульсным или гармоническим. Рабочие частоты входных звеньев подбираются близкими к резонансным, так как обычно только таким образом можно получить достаточную величину амплитуды колебаний. Шаговый режим вибродвигателя — это режим конечного перемещения выходного звена под воздействием на входное звено электрического сигнала в виде импульса, пакета импульсов или нескольких периодов гармонического сигнала. Значительную роль играют переходные процессы в вибродвигателе, которые в зависимости от параметров вибродвигателя и возбуждающих сигналов могут иметь как положительное, так и отрицательное воздействие на качество его работы.

Семейства величин, характеризующие работу вибродвигателя, могут представлять осредненные характеристики движения, конструктивные особенности вибродвигателя, эксплуатационные его качества и т. п. Однако здесь используем характеристики, представляющие движение вибродвигателя как математической модели и вычисляемые путем анализа решений системы дифференциальных уравнений движения вибродвигателя.

При вычислении характеристик работы вибродвигателя в режиме непрерывного движения значения выходных величин берутся в установившемся режиме вынужденных колебаний после полного затухания переходных процессов. Формулы приводятся для вибродвигателя с дискретным контактом с одной степенью свободы выходного звена (см. п. 2.3). При большем числе степеней свободы характеристики вычисляются покомпонентно для каждой составляющей движения выходного звена, а в случае контактирования звеньев по площади некоторой поверхности S , в приводимых ниже формулах следует вычислить поверхностные интегралы по S .

Характеристиками работы вибродвигателя в режиме непрерывного движения являются следующие.

1. Средняя скорость движения выходного звена

$$\bar{\dot{\psi}}_c = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\psi} dt,$$

где ψ — координата движения выходного звена; T — период вынужденных колебаний входного звена.

2. Неравномерность скорости движения. Здесь могут быть использованы средний и среднеквадратный коэффициенты неравномерности:

$$\delta\dot{\psi}_c = \Delta\dot{\psi}/\dot{\psi}_c; \quad \delta\dot{\psi}_{ck} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}_c}\right)^2 dt.$$

Промежуток времени измерения девиации $\Delta\dot{\psi}$ может быть равным одному периоду колебаний входного звена. Однако такой промежуток используется весьма редко, так как обычно $\Delta\dot{\psi}$ является малой величиной более высокого порядка по сравнению с $\dot{\psi}_c$ и тогда $\delta\dot{\psi} \approx 0$. Более часто промежуток времени берется значительно превышающим T и вычисляется девиация средней скорости движения $\Delta\dot{\psi}_c$, которая может быть обусловлена, например, конструктивными несовершенствами вибродвигателя. Однако в этом случае оценка $\delta\dot{\psi}_c$ по математической конечноэлементной модели может оказаться затруднительной.

3. Средний крутящий момент для вибродвигателя вращательного движения

$$M_{к.с} = \sum_i \frac{R^i}{T} \int_0^T P_1^{ABi} dt;$$

средняя движущая сила для линейного вибродвигателя

$$F_c = \sum_i \frac{1}{T} \int_0^T P_1^{ABi} dt.$$

4. Средняя сила взаимодействия входного и выходного звеньев в нормальном направлении, характеризующая среднюю силу прижатия входного звена к выходному в зоне контакта:

$$N_c = \frac{1}{T} \int_0^T P_3^{ABi} dt$$

в i -й контактной точке.

5. Полезная работа, совершаемая вибродвигателем за один период колебаний входного звена, для вибродвигателя враща-

тельного движения

$$A_n = \int_0^T M_{к.с} \dot{\psi} dt,$$

а для линейного вибродвигателя вместо $M_{к.с}$ и $\dot{\psi}$ следует подставить F_c и l .

6. Работа, совершаемая тангенциальными силами взаимодействия за один период колебаний входного звена, для вибродвигателя вращательного движения

$$A_T = \int_0^T (P_1^{BAi} (R^i \dot{\psi} - \delta_1^{pi} - [a]_1^i U^{Ai}) - P_2^{BAi} (\delta_2^{pi} + [a]_2^i U^{Ai})) dt,$$

а для линейного вибродвигателя вместо $R^i \dot{\psi}$ следует подставить l .

7. Коэффициент полезного действия вибродвигателя

$$\eta = A_n / (A_n + A_T + A_{эл} + A_{терм}),$$

где $A_{эл}$ — работа электрических сил; $A_{терм}$ — тепловые потери при работе вибродвигателя.

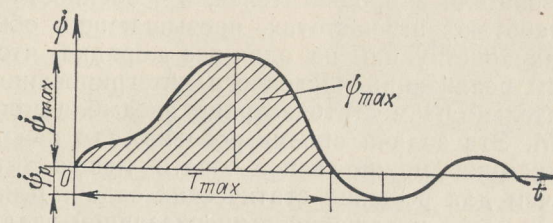


Рис. 2.5. К определению характеристик работы вибродвигателя в силовом режиме

При исследовании математической модели вибродвигателя часто используется КПД с учетом механических работ, т. е. в виде

$$\eta = A_n / (A_n + A_T).$$

Для оценки шагового режима [10] введем следующие безразмерные характеристики (рис. 2.5):

$$l_1 = \psi_{max} r / A_N; \quad l_2 = T_{max} \omega_0; \quad l_3 = \left| \frac{\dot{\psi}_{max}}{\dot{\psi}_p} \right|,$$

где ψ_{max} — максимальный угол поворота выходного звена; T_{max} — время движения выходного звена в положительном направлении до первой его остановки; $\dot{\psi}_{max}$ — максимальная скорость, достигаемая выходным звеном в положительном направлении; $\dot{\psi}_p$ — максимальная скорость, достигаемая выходным звеном в обратном направлении, обусловленная паразитным влиянием переходного процесса; ω_0 — собственная частота колебаний входного звена; A_N — смещение входного звена в точке крепления контактного элемента при статическом воздействии на входное звено электрическим полем величиной, равной амплитуде импульса, действующего на входное звено при шаговом режиме.

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ПРИМЕНЕНИЯ МКЭ К РАСЧЕТАМ ВИБРОДВИГАТЕЛЕЙ

Применение МКЭ к расчету динамики вибродвигателей, по сравнению с классическими задачами теории упругости, имеет ряд особенностей. В первую очередь это относится к количеству матриц конечных элементов. С учетом пьезоэффекта для описания конечного элемента требуется пять матриц. Хотя получение этих матриц не представляет математических сложностей, требуется выполнить большой объем чисто технической работы, что приводит к дополнительным затратам на составление и отладку программ.

Вибродвигатели являются резонансными устройствами, вследствие чего решение задачи разбивается на два основных этапа. Первый — определение собственных частот преобразователя, после чего можно приступить ко второму — численному интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений движения самого вибродвигателя.

Преобразователи вибродвигателей, в особенности пьезокерамические, работают на частотах, превышающих обычные для механических конструкций на один-два порядка, что приводит к трудностям реализации численного интегрирования. В связи с этим желательно разместить матрицы ансамбля в оперативной памяти ЭВМ. Эта задача вполне реальна, так как для исследования динамики можно использовать меньшее количество элементов, чем для решения статических задач. Для экономии машинного времени и решения вышеуказанной задачи использовались разреженные матрицы.

3.1. ПОЛУЧЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ МАТРИЦ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ВИДЕ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ

Возникнув как один из приемов исследований разнообразных конструкций, МКЭ к настоящему времени получил всеобщее признание и применяется для изучения широкого класса задач техники и физики. В настоящее время разработано большое количество разных типов конечных элементов. Методика получения структурных матриц конечных элементов разработана, но для каждого нового типа элемента структурные матрицы получают, либо используя численное интегрирование, что ухудшает точность и увеличивает затраты машинного времени, либо путем аналитического интегрирования вручную, что усложняет программную реализацию получения структурных матриц, а также позволяет исследовать не очень сложные элементы.

С развитием вычислительной техники появилась возможность производить аналитические преобразования на ЭВМ и вместе

с тем образовалось большое количество систем для проведения таких операций. Заманчивой представляется возможность получения структурных матриц конечных элементов в аналитическом виде с помощью ЭВМ, так как получение структурных матриц конечных элементов связано с большим объемом чисто технической работы.

Первой работой, посвященной аналитическому исследованию матриц жесткости тетраэдральных конечных элементов с помощью ЭВМ, является статья Педерсена [33], в которой приведена программа на ФОРМАКе. Целесообразности получения матриц жесткости конечных элементов и использованию в этих целях систем аналитических преобразований посвящены соответственно работы [35] и [33]. В них использовалась система МАКСИМА, которая реализована на языке ЛИСП. Однако ни ФОРМАК, ни МАКСИМА не позволяют получать результаты в виде, удобном для дальнейшего использования в программах по МКЭ. Система ВИБРАН [6, 20] позволяет получать результаты в виде перфокарт по правилам ФОРТРАНа, которые могут непосредственно использоваться как база для соответствующего программного модуля будущей программы, реализующей МКЭ.

Система ВИБРАН является препроцессором языка ФОРТРАН для проведения аналитических выкладок с полиномами, рациональными функциями, а также тригонометрическими и комплексными рядами. Программа, написанная на ВИБРАНе, представляет собой набор операторов и команд, выполняющих аналитические преобразования, и операторов ФОРТРАНа.

В этой главе показано, как с помощью ВИБРАНа получить матрицы конечных элементов, а также автоматизировать подготовку программных модулей для МКЭ.

Матрицы плоского конечного элемента в полярных координатах. Рассмотрим конечный элемент в форме сектора, который показан на рис. 3.1. Функция формы такого элемента выражается в виде

$$N'_1 = \frac{R_2 - \rho}{\alpha} \frac{\gamma_2 - \gamma}{\beta}; \quad N'_2 = \frac{\rho - R_1}{\alpha} \frac{\gamma_2 - \gamma}{\beta}; \quad N'_3 = \frac{\rho - R_1}{\alpha} \frac{\gamma - \gamma_1}{\beta};$$

$$N'_4 = \frac{R_2 - \rho}{\alpha} \frac{\gamma - \gamma_1}{\beta}; \quad \alpha = R_2 - R_1;$$

$$\beta = \gamma_2 - \gamma_1.$$

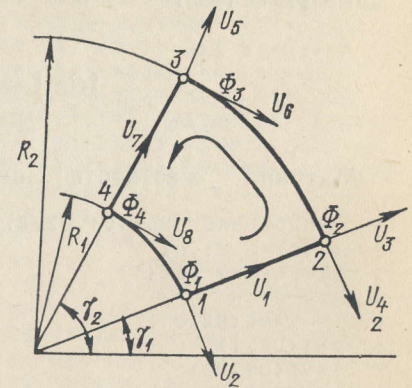


Рис. 3.1. Конечный элемент преобразователя в форме сектора

Матрица $[B_i]$ i -го узла

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial \rho} & 0 \\ \frac{N'_i}{\rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial N'_i}{\partial \gamma} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial N'_i}{\partial \gamma} & \frac{\partial N_i}{\partial \rho} - \frac{N'_i}{\rho} \end{bmatrix}.$$

Матрица $[B_{Ei}]$ i -го узла

$$[B_{Ei}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial N'_i}{\partial \gamma} \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости имеет вид

$$[K]^e =$$

$$= h \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int_{R_1}^{R_2} [B]^T [c^E] [B] \rho \, d\rho \, d\gamma, \quad (3.1)$$

где h — толщина элемента.

Остальные матрицы имеют аналогичный вид, поэтому можно составить одну программу на ВИБРАНЕ для получения матрицы жесткости, а для получения остальных — просто видоизменить имеющуюся программу.

На рис. 3.2 показана процедура, проводимая на ВИБРАНЕ, предназначенная для интегрирования двойного интеграла (3.1) в полярных координатах. Надо иметь в виду, что процесс интегрирования в системах аналитических преобразований в общем случае не решен, так как имеется большое количество разнообразных систем координат, а также не все интегралы тривиально интегрируются.

Рис. 3.2. Процедура на ВИБРАНЕ для интегрирования двойного интеграла

На рис. 3.3—3.5 представлены результаты для первого элемента матриц $[K]^e$, $[T]^e$, $[M]^e$ соответственно. В этих формулах звездочка означает операцию умножения, две звездочки — операцию возведения в степень. Две первые буквы LN перед пере-

$$\begin{aligned} K11 = & 210 * R1 ** 2 * T2 ** 2 * T1 * D11 - 210 * R1 ** 2 * T2 * T1 ** 2 * D11 \\ & - 840 * R2 * R * T2 ** 2 * T1 * D12 + 420 * R1 ** 2 * T2 ** 2 * T1 * D12 + 840 * \\ & * R2 * R1 * T2 * T1 ** 2 * D12 - 420 * R1 ** 2 * T2 * T1 ** 2 * D12 + 840 * R2 \\ & * R1 * T2 * T1 * D13 - 420 * R1 ** 2 * T2 * T1 * D13 + 70 * R1 ** 2 * T1 ** 3 \\ & * D11 - 280 * R2 * R1 * T1 ** 3 * D12 + 140 * R1 ** 2 * T1 ** 3 * D12 - 420 \\ & * R2 * R1 * T1 ** 2 * D13 + 210 * R1 ** 2 * T1 ** 2 * D13 + 420 * R2 ** 2 \\ & * T2 * T1 ** 2 * D22 * LNR1 + 840 * R2 * R1 * T2 * T1 ** 2 * D22 - 840 * R2 ** 2 \\ & * T2 ** 2 * T1 * D22 * LNR1 - 840 * R2 * R1 * T2 ** 2 * T1 * D22 - 420 * R2 ** 2 \\ & * T2 * T1 * D23 * LNR1 + 1680 * R2 * R1 * T2 * T1 * D23 + 210 * R1 ** 2 * T2 ** 2 \\ & * T1 * D23 - 210 * R1 ** 2 * T2 * T1 ** 2 * D22 - 420 * R1 ** 2 * T2 * T1 * D23 \\ & + 140 * R2 ** 2 * T1 ** 3 * D22 * LNR1 - 280 * R2 * R1 * T1 ** 3 * D22 + 420 \\ & * R2 ** 2 * T1 ** 2 * D23 * LNR1 - 840 * R2 * R1 * T1 ** 2 * D23 + 70 * R1 ** 2 \\ & * T1 ** 3 * D22 + 210 * R1 ** 2 * T1 ** 2 * D23 + 420 * R2 ** 2 * T1 * D23 \\ & * LNR1 - 840 * R2 * R1 * T1 * D33 + 210 * R1 ** 2 * T1 * D33 - 70 * R1 ** 2 \\ & * T2 ** 3 * D11 + 280 * R2 * R1 * T2 ** 3 * D12 - 140 * R1 ** 2 * T2 ** 3 \\ & * D12 - 420 * R2 * R1 * T2 ** 2 * D13 + 210 * R1 ** 2 * T2 ** 2 * D13 - 140 \\ & * R2 ** 2 * T2 ** 3 * D22 * LNR1 + 280 * R2 * R1 * T2 ** 3 * D22 + 420 * R2 ** 2 \\ & * T2 ** 2 * D23 * LNR1 - 840 * R2 * R1 * T2 ** 2 * D23 - 70 * R1 ** 2 * T2 ** 3 \\ & ** D22 + 210 * R1 ** 2 * T2 ** 2 * D23 - 420 * R2 ** 2 * T2 * D33 * LNR1 + 840 \\ & * R2 * R1 * T2 * D33 - 210 * R1 ** 2 * T2 * D33 - 210 * R2 ** 2 * T2 * T1 \\ & * D11 + 210 * R2 ** 2 * T2 * T1 ** 2 * D11 + 420 * R2 ** 2 * T2 ** 2 * T1 \\ & * D12 - 420 * R2 ** 2 * T2 * T1 ** 2 * D12 - 420 * R2 ** 2 * T2 * T1 * D13 \\ & - 70 * R2 ** 2 * T1 ** 3 * D11 + 140 * R2 ** 2 * T1 ** 3 * D12 + 210 * R2 ** 2 \\ & * T1 ** 2 * D13 - 420 * R2 ** 2 * T2 ** 2 * T1 * D22 * LNR2 + 630 * R2 ** 2 \\ & * T2 ** 2 * T1 * D22 + 420 * R2 ** 2 * T2 ** 2 * T1 ** 2 * D22 * LNR2 - 630 * R2 ** 2 \\ & * T2 * T1 ** 2 * D22 + 840 * R2 ** 2 * T2 * T1 * D23 * LNR2 - 1260 * R2 ** 2 \\ & * T2 * T1 * D23 - 140 * R2 ** 2 * T1 ** 3 * D22 * LNR2 + 210 * R2 ** 2 * T1 ** 3 \\ & * D22 - 42 * R2 ** 2 * T1 ** 2 * D23 * LNR2 + 630 * R2 ** 2 * T1 ** 2 * D23 \\ & - 420 * R2 ** 2 * T1 * D33 * LNR2 + 630 * R2 ** 2 * T1 * D33 + 70 * R2 ** 2 \\ & * T2 ** 3 * D11 - 140 * R2 ** 2 * T2 ** 3 * D12 + 210 * R2 ** 2 * T2 ** 2 \\ & * D13 + 140 * R2 ** 2 * T2 ** 3 * D22 * LNR2 - 210 * R2 ** 2 * T2 ** 3 * D22 \\ & - 420 * R2 ** 2 * T2 ** 2 * D23 * LNR2 + 630 * R2 ** 2 * T2 ** 2 * D23 + 420 \\ & * R2 ** 2 * T2 * D33 * LNR2 - 630 * R2 ** 2 * T2 * D33 \end{aligned}$$

Рис. 3.3. Аналитическое выражение первого элемента матрицы $[K]^e$

$$\begin{aligned} T11 = & 420 * T2 ** 2 * T1 * R1 * \Theta11 - 420 * T2 * T1 ** 2 * R1 * \Theta11 - 420 * T2 ** 2 \\ & * T1 * R2 * \Theta12 * LNR1 + 420 * T2 * T1 ** 2 * R2 * \Theta12 * LNR1 + 420 * T2 ** 2 \\ & * T1 * R1 * \Theta12 - 420 * T2 * T1 ** 2 * R1 * \Theta12 + 420 * T2 * T1 * R2 * \Theta12 * LNR1 \\ & - 420 * T2 * T1 * R1 * \Theta21 + 140 * T1 ** 3 * R1 * \Theta11 - 140 * T1 ** 3 * R2 * \Theta12 \\ & * LNR1 + 140 * T1 ** 3 * R1 * \Theta12 - 210 * T1 ** 2 * R2 * \Theta21 * LNR1 + 210 \\ & * T1 ** 2 * R1 * \Theta21 - 140 * T2 ** 3 * R1 * \Theta11 + 140 * T2 ** 3 * R2 * \Theta12 \\ & * LNR1 - 140 * T2 ** 3 * R1 * \Theta12 - 210 * T2 ** 2 * R2 * \Theta21 * LNR1 + 210 \\ & * T2 ** 2 * R1 * \Theta21 - 420 * T2 ** 2 * T1 * R2 * \Theta11 + 420 * T2 * T1 ** 2 * R2 \\ & * \Theta11 + 420 * T2 ** 2 * T1 * R2 * \Theta12 * LNR2 - 420 * T2 * T1 ** 2 * R2 * \Theta12 \\ & * LNR2 - 420 * T2 ** 2 * T1 * R2 * \Theta12 + 420 * T2 * T1 ** 2 * R2 * \Theta12 - 420 \\ & * T2 * T1 * R2 * \Theta21 * LNR2 + 420 * T2 * T1 * R2 * \Theta21 - 140 * T1 ** 3 * R2 * \Theta11 \\ & + 140 * T1 ** 3 * R2 * \Theta12 * LNR2 - 140 * T1 ** 3 * R2 * \Theta12 + 210 * T1 ** 2 \\ & * R2 * \Theta21 * LNR2 - 210 * T1 ** 2 * R2 * \Theta21 + 140 * T2 ** 3 * R2 * \Theta11 - 140 \\ & * T2 ** 3 * R2 * \Theta12 * LNR2 + 140 * T2 ** 3 * R2 * \Theta12 + 210 * T2 ** 2 * R2 \\ & * \Theta21 * LNR2 - 210 * T2 ** 2 * R2 * \Theta21 \end{aligned}$$

Рис. 3.4. Аналитическое выражение первого элемента матрицы $[T]^e$


```

M11 =18*R2**2*T2**3*T1**2-18*R2*T2**4*T1**2-24*R2**2
*T2**2*T1**3+24*R2*T2**3*T1**3+6*T2**5*T1**2
-8*T2**4*T1**3+9*R2**2*T2**2*T1**4-9*R2*T2**2*T1**4)
+3*T2**3*T1**4-6*R2**3*T2**2*T1**2+8*R2**3*T2
*T1**3-3*R2**3*T1**4-18*R2**2*T2**3*R1**2+18
*R2*T2**4*R1**2+24*R2**2*T2**2*R1**3-24*R2*T2**3
*R1**3-6*T2**5*R1**2+8*T2**4*R1**3-9*R2**2*T2
*R1**4+9*R2*T2**2*R1**4-3*T2**3*R1**4+6*R2**3
*T2**2*R1**2-8*R2**3*T2*R1**3+3*R2**3*R1**4

```

Рис. 3.5. Аналитическое выражение первого элемента матрицы $[M]^e$

```

SUBROUTINE FIEMSE(AK)
DIMENSION AK(1)
COMMON/FIDATA/ NEL,R ,R2,TET1,TET2,HTET2,H,BETA,ALF,RO
AK( 1) =
+0.333333E00*R1*TET1*TET2**2-0.100000E01*R1*ALF
**TET1*TET2**2+R1*ALF*TET1**2*TET2
-0.333333E00*R1*TET1**2*TET2+R1*ALF**2
**TET1*TET2**2-0.100000E01*R1*ALF**2*TET1**2*TET2
+0.333333E00*R1*ALF**2*TET1**3-0.333333E00*R1*ALF
**TET1**3+Y.111111E00*R1*TET1**3-0.333333E00*R1*(-2)*TET1
**TET2**2+R2**3+ALF/R1*TET1*TET2**2
**R2**2-0.100000E01*R1*(-1)*ALF*TET1**2*TET2*R2**2
+0.333333E00*R1*(-2)*TET1**2*TET2*R2**3-0.100000E01*ALF**2]
**TET1*TET2**2*R2+ALF**2*TET1**2*TET2
**R2-0.333333E00*ALF**2*TET1**3*R2+0.333333E00*R1*(-1)
**ALF*TET1**3*R2**2-0.111111E00*R1*(-2)*TET1**3*R2**3
-0.111111E00*R1*TET2**3+0.333333E00*R1*ALF*TET2**3
-0.333333E00*R1*ALF**2*TET2**3+0.111111E00*R1*(-2)*TET2**3
**R2**3-0.333333E00*R1*(-1)*ALF*TET2**3*R2**2+0.333333E00
**ALF**2*TET2**3*R2

```

Рис. 3.6. Фрагмент программы для составления матрицы $[M]^e$

менной имеют смысл функции натурального логарифма. В соответствии с набором символов ЭВМ введены замены: $\rho = R$, $\gamma = T$, $c^E = D$, $e \approx \partial$.

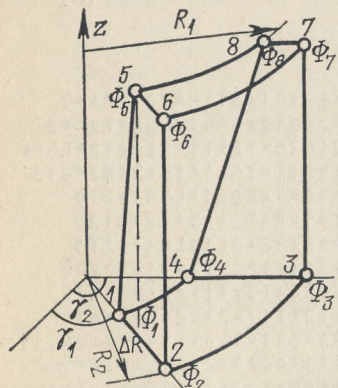


Рис. 3.7. Объемный КЭ в цилиндрических координатах

на базе перфокарт с выражениями для матрицы масс элемента, полученных с помощью ВИБРАНа.

Матрицы объемного конечного элемента в цилиндрических координатах. На рис. 3.7 представлен объемный конечный элемент с восьмью узлами в цилиндрических координатах. При $\Delta R = 0$ такой элемент представляет собой параллелепипед в цилиндрических координатах. Функция формы такого элемента (получена на ЭВМ, и из-за ограниченности набора символов ЭВМ заменены ρ на R и γ на T):

```

N1 =R2*T2*Z2-R*T2*Z2+R2*T*Z2+R*T*Z2-R2*T2*Z+R*Y2*Z+R2
*T*Z-R*T*Z
N2 =R*T2*Z2-R1*T2*Z2-R*T*Z2+R1*T*Z2-R*T2*Z+R1*T2*Z+R*T
*Z-R1*T*Z
N3 =R*T*Z2-R1*T*Z2-R*T1*Z2+R1*T1*Z2-R*T*Z+R1*T*Z+R*T1
*Z-R1*T1*Z
N4 =R2*T*Z2-R*T*Z2-R2*T1*Z2+R*T1*Z2-R2*T*Z+R*T*Z+R2*T1
*Z-R*T1*Z
N5 =R2*T2*Z-R*T2*Z-R2*T*Z+R*T*Z-R2*T2*Z1+R*T2*Z1+R2*T
*Z1-R*T*Z1
N6 =R2*T*Z-R1*T2*Z-R*T*Z+R1*T*Z-R*T2*Z1+R1*T2*Z1+R*T*Z1
-R1*T*Z1
N7 =R*T*Z-R1*T*Z-R*T1*Z+R1*T1*Z-R*T*Z1+R1*T*Z1+R*T1*Z1
-R1*T1*Z1
N8 =R2*T*Z-R2*T1*Z+R*T1*Z-R2*T*Z1+R*T*Z1+R2*T1*Z1
-R*T1*Z1

```

$$P = (R_2 - R_1) (\gamma_2 - \gamma_1) (z_2 - z_1). \quad (3.2)$$

Матрицы связи $[B]$ и $[B_E]$ для i -го узла:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{\rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial \gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial \gamma} & \frac{\partial N_i}{\partial \rho} - \frac{N_i}{\rho} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \rho} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad i = \overline{1, 8},$$

$$[B_{Ei}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad i = \overline{1, 8}.$$

Соответствующие матрицы для 1-го узла, полученные с помощью ВИБРАНа, имеют вид:

матрица [B]

```

B11 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B21 = R2/R*T2*Z2-T2*Z2-R2/R*T*Z2+T*Z2-R2/R*T2*Z+T2*Z+R2
      /R*T*Z-T*Z
B31 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B41 = 0
B51 = -R2*T2+R*T2+R2*T-R*T
B61 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B12 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B22 = 0
B23 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B32 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B42 = -R2/R*T2*Z2+R2/R*T*Z2+R2/R*T2*Z-R2/R*T*Z
B52 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B62 = -R2*T2+R*T2+R2*T-R*T
B13 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B33 = -R2*T2+R*T2+R2*T-R*T
B43 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B53 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
B63 = -R2/R*Z2+Z2+R2/R*Z-Z

```

матрица [B_E]

```

C11 = -T2*Z2+T*Z2+T2*Z-T*Z
C22 = -R2/R*Z2+Z2+R2/R*Z-Z
C33 = -R2*T2+R*T2+R2*T-R*T

```

Их элементы должны быть разделены на P (3.2).
Соответственно матрицы для такого элемента имеют вид

$$[K]^e = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int_{R_1}^{R_2} \int_{z_1}^{z_2} [B]^T [c^E] [B] \rho \, dz \, d\rho \, d\gamma;$$

$$[T]^e = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int_{R_1}^{R_2} \int_{z_1}^{z_2} [B]^T [e] [B_E] \rho \, dz \, d\rho \, d\gamma;$$

$$[S]^e = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int_{R_1}^{R_2} \int_{z_1}^{z_2} [B_E]^T [\varepsilon^S] [B_E] \, dz \, d\rho \, d\gamma.$$

На рис. 3.8 представлен текст процедуры на ВИБРАНе для вычисления тройных определенных интегралов в цилиндрической системе координат. С ее помощью и получены матрицы объемного элемента. Результат для матрицы $[T]^e$ показан на рис. 3.9 (должен быть умножен на P^2).

Структурные матрицы биморфного асимметричного конечного элемента в пространственной системе координат. В п. 1.3 описан биморфный асимметричный конечный элемент в про-

```

1  PROCEDURE INER(Z1,R1,T1,Z2,R2,T2,REZ,A)
2      POLINOM REZ,A
3      POLINOM B,D
4      COMMON/AN/B,D
5      COMMON T,R,Z
6      SAVE(A,REZ)
7      MX1(A,R)
8      INT(A,T)
9      SAVE(B,A)
10     SAVE(D, )
11     SB1(B,T,T1)
12     SCA1(B,-1, )
13     SB1(D,T,T2)
14     ADDA(D,B)
15     SAVE(A,D)
16     IN3(A,R)
17     SAVE(B,A)
18     SAVE(D,A)
19     SB1(B,R,R1)
20     SB1(D,R,R2)
21     SBLN(B,R,R1)
22     SBLN(D,R,R2)
23     SCA1(B,-1, )
24     ADDA(B,D)
25     SAVE(A,B)
26     INT(A,Z)
27     SAVE(D,A)
28     SB1(A,Z,Z1)
29     SB1(D,Z,Z2)
30     SCA1(A,-1, )
31     ADDA(A,D)
32     RETURN
33     END

```

Рис. 3.8. Текст процедуры на ВИБРАНе для вычисления тройных определенных интегралов

```

T25 = .166666*R1**2*T2**3*Z2**2*Z1*E15+.166666*R1**2
      *T2**3*Z2*Z1**2*E15+.555555E-1*R1**2*T2**3*Z1**3
      *E15-.5*R1**2*T2**2*Z2**2*Z1*E15*T1+.5*R1**2*T2
      *Z2**2*Z1*E15*T1**2+.5*R1**2*T2**2*Z2*Z1**2*E15
      *T1+.5*R1**2*T2*Z2*Z1**2*E15*T1**2+.166666*R1**2
      *Z2**2*Z1*E15*T1**3+.166666*R1**2*Z2*Z1**2*E15
      *T1**3+.166666*R1**2*T2**2*Z1**3*E15*T1+.166666
      *R1**2*T2*Z1**3*E15*T1**2+.555555E-1*R1**2*Z1**3
      *E15*T1**3+.166666*T2**3*Z2**2*Z1*E15*R2**2+.166666
      *T2**3*Z2*Z1**2*E15*R2**2+.555555E-1*T2**3*Z1**3
      *E15*R2**2+.5*T2**2*Z2**2*Z1*E15*T1*R2**2-.5*T2
      *Z2**2*Z1*E15*T1**2*R2**2+.5*T2**2*Z2*Z1**2*E15
      *T1*R2**2+.5*T2*Z2*Z1**2*E15*T1**2*R2**2+.166666
      *Z2**2*Z1*E15*T1**3*R2**2+.166666*Z2*Z1**2*E15
      *T1**3*R2**2+.166666*T2**2*Z1**3*E15*T1*R2**2
      -.166666*T2*Z1**3*E15*T1**2*R2**2+.555555E-1*Z1**3
      *E15*T1**3*R2**2-.555555E-1*R1**2*T2**3*Z2**3
      *E15+.166666*R1**2*T2**2*Z2**3*E15*T1-.166666*R1**2
      *T2*Z2**3*E15*T1**2+.555555E-1*R1**2*Z2**3*E15
      *T1**3+.555555E-1*T2**3*Z2**3*E15*R2**2-.166666
      *T2**2*Z2**3*E15*T1*R2**2+.166666*T2*Z2**3*E15
      *T1**2*R2**2-.555555E-1*Z2**3*E15*T1**3*R2**2

```

Рис. 3.9. Элемент t_{25} матрицы $[T]^e$

странственной системе координат. Структурные матрицы такого элемента выражаются формулами, в которые входят двумерные функции Эрмита:

```

E1 = 1-X-Y+X*Y
E2 = 1-X-Y+X*Y
E3 = 1-3*X**2+X*Y**3+Y**2+2*X**3+3*X**2+Y+3*X*Y**2
    +2*Y**3-2*X**3+Y**2+X*Y**3
E4 = Y*B-Y*B*X-2*Y**2*B+2*Y**2*B*X+Y**3*B-Y**3*B*X
E5 = A*X*A*X*Y+2*A*X**2-2*A*X**2*Y-A*X**3+A*X**3*Y
E6 = 0
E7 = Y*Y*X
E8 = Y*Y*X
E9 = 3*Y**2+Y*X-2*Y**3+3*Y**2*X-3*Y*X**2+2*Y**3*X
    +2*Y*X**3
E10 = B*Y**2+B*Y**3+B*Y**2*X-B*Y**3*X
E11 = A*X*Y+2*A*X**2*Y-A*X**3*Y
E12 = 0
E13 = X*Y
E14 = X*Y
E15 = X*Y+3*X**2*Y+3*X*Y**2+2*X**3*Y-2*X*Y**3
E16 = B*X*Y**2+B*X*Y**3
E17 = A*Y*X**2+A*Y*X**3
E18 = 0
E19 = X*X+Y
E20 = X*X+Y
E21 = 3*X**2+X*Y-2*X**3+3*X*Y**2+2*X**3*Y+2*X*Y**3
    +3*X**2*Y
E22 = B*X*Y-2*B*X*Y**2+B*X*Y**3
E23 = A*X**2-A*X**3+A*X**2*Y+A*X**3*Y
E24 = 0

```

На рис. 3.10 представлена процедура на ВИБРАНе по вычислению двойных определенных интегралов, входящих в выра-

```

1  PROCEDURE BALL(B,X,Y,C)
2  RACIONAL B,C
3  INT(B,X)
4  SAVE(C,B)
5  SBST(C,X,0.)
6  SCA1(C,-1.)
7  SBST(B,X,1.)
8  ADDA(B,C)
9  INT(C,Y)
10 SAVE(C,B)
11 SBST(C,Y,0.)
12 SCA1(C,-1.)
13 SBST(B,Y,1.)
14 ADDA(C,B)
15 RETURN
16 END

```

Рис. 3.10. Процедура на ВИБРАНе для вычисления двойных интегралов от полиномов Эрмита

(хранится верхний треугольник по столбцам). Как видно из рисунка, выражения для элементов матриц жесткости очень

просты, некоторые из них равны нулю. Получение матриц методами численного интегрирования занимает много машинного времени, для проведения матричного умножения и сложения требуются дополнительные матрицы. Вся матрица жесткости в аналитическом виде получена за 1 мин при 80 килобайтах

```

      2  3
K5   = .226156E-4*X*Y*Y*B**2*A**2
      2  4
K8   = 0
      2  5
K12  = .207347E-3*X*Y*Y*B**2/A
      2  9
K38  = .226156E-4*X*Y*Y*B**2*A**2
      2 10
K47  = 0
      2 11
K57  = .207347E-3*X*Y*Y*B**2/A
      2 15
K107 = .226156E-4*X*Y*Y*B**2*A**2
      2 16
K122 = 0
      2 17
K138 = .184732E-3*X*Y*Y*B**2/A
      2 21
K212 = .22616E-4*X*Y*Y*B**2*A**2
      2 22
K233 = 0
      2 23
K255 = .184732E-3*X*Y*Y*B**2/A
      8  9
K44  = .226066E-4*B**2*X*Y*Y*A**2

```

Рис. 3.11. Элементы матрицы жесткости КЭ

памяти на ЕС-1022. Другие структурные матрицы получены аналогичным образом при видоизменении имеющейся программы.

3.2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОЛУЧАЕМЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ПРИМЕНЕНИЯ МКЭ К РАСЧЕТУ ДИНАМИКИ ВИБРОДВИГАТЕЛЕЙ

Применение МКЭ к исследованию динамических задач началось практически с его появлением. В настоящее время существует множество программ и алгоритмов, в том числе и универсальных, позволяющих решать линейные нестационарные задачи. Не все методы прямого интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений пригодны к использованию в нелинейных задачах. Для нелинейных систем, в правые части уравнений которых не входят производные, существуют устойчивые численные методы [33]:

$$[M]\ddot{U} + [K]U = F(t, U). \quad (3.3)$$

При интегрировании уравнений (3.3) не требуется аппроксимация производных, что позволяет довольно просто получить рекуррентное соотношение даже для нескольких интервалов времени одновременно. Рекуррентные соотношения могут быть получены различными способами. Например, может быть непосредственно использована разностная схема или метод Галеркина. Также неплохо зарекомендовали себя методы, предложенные Вильсоном (θ-метод Вильсона) и Ньюмарком (β-метод Ньюмарка [3]). Эти методы для линейных систем считаются безусловно стабильными. Однако для общего решения систем нелинейных дифференциальных уравнений, получаемых в результате применения МКЭ, эти методы не всегда применимы.

Обычно используются два типа матриц масс: диагональные и согласованные. Диагональная матрица получается в том случае, если масса элемента равномерно распределена по его узлам. О. Зенкевич [13] считает, что согласованная матрица масс является единственно приемлемой при расчетах динамических задач. Однако диагональную матрицу масс можно использовать, когда необходимо найти одну-две первые собственные частоты. Известно, что при использовании диагональной матрицы масс получается завышенное значение собственной частоты, а при применении согласованной матрицы масс — ее заниженное значение. В известной программе по МКЭ NASTRAN для балок используется матрица масс, являющаяся средним между диагональной и согласованной. В этом случае результирующая матрица получается недиагональной, но итеративные методы нахождения собственных частот сходятся несколько быстрее, чем при согласованных матрицах.

В данной работе при интегрировании системы нелинейных дифференциальных уравнений применялся модифицированный метод Хуоболта третьего порядка. Допустим, что имеется матричное нелинейное дифференциальное уравнение, полученное в результате применения МКЭ:

$$[M]\ddot{U} + [C]\dot{U} + [K]U = F(t, U, \dot{U}). \quad (3.4)$$

В этих уравнениях матрицы масс $[M]$ и демпфирования $[C]$ считаются согласованными. Выразим вторые производные перемещений через перемещения с использованием разностей третьего порядка:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2U_{t+\Delta t} - 5U_t + 4U_{t-\Delta t} - U_{t-2\Delta t})/(\Delta t^2), \quad (3.5)$$

где Δt — шаг по времени.

Для первой производной требуется более точная аппроксимация, так как производные входят в правые части в виде нелинейных членов:

$$U_{t+\Delta t} = (11U_{t+\Delta t} - 18U_t + 9U_{t-\Delta t} - 2U_{t-2\Delta t})/(6\Delta t) + S(t), \quad (3.6)$$

где $S(t)$ — поправочный член, который выражается через перемещения следующим образом:

$$S(t) = 50 (U_{t+\Delta t} - 4U_t + 6U_{t-\Delta t} - 4U_{t-2\Delta t} + U_{t-3\Delta t})/(\Delta t).$$

Такая аппроксимация производных разностями четвертого порядка позволяет снизить ошибку в вычислениях нелинейных сил, входящих в правую часть системы (3.4).

Для нелинейных членов $F(t, U, \dot{U})$ введем аппроксимацию, получаемую при применении первого члена разложения в ряде Тейлора:

$$F_{t+\Delta t} = 2F_t - F_{t-\Delta t}. \quad (3.7)$$

Формулой (3.7) можно пользоваться, когда $\{F\}$ слабо нелинейна по времени, т. е. в течение времени Δt она является линейной.

Подставляя формулы (3.5) — (3.7) в (3.4) и оставляя в левой части перемещения в точке $t + \Delta t$, получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$[A]\dot{U}_{t+\Delta t} = (\Delta t)^2 (2F_t - F_{t-\Delta t}) + [A_1] + [A_2], \quad (3.8)$$

где

$$[A] = 2[M] + 11\Delta t[C]/6 + (\Delta t)^2[K];$$

$$[A_1] = \frac{\Delta t}{6}[C](18U_t - 9U_{t-\Delta t} + 2U_{t-2\Delta t});$$

$$[A_2] = [M](5U_t - 4U_{t-\Delta t} + U_{t-2\Delta t}),$$

и производная вычисляется по формуле (3.10).

Как видно, уравнение (3.8) удобно применять при постоянных Δt и тогда, когда матрицы $[M]$, $[K]$ и $[C]$ не зависят от времени. При этом матрица $[A]$ составляется один раз перед интегрированием. В противном случае, если это возможно, надо разделить ее на две части, одна из которых зависит от времени, другая — постоянная. При этом переменную часть можно перенести в правую часть уравнения (3.4).

Произведем оценку остаточных членов, которые для первой и второй производных выражаются следующими формулами:

$$R_1(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^n (x - (x-1) \dots (x-i-1))'_x \frac{\Delta^i U(t_0)}{i!};$$

$$R_2(t) = \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^n (x(x-1) \dots (x-i-1))'_x \frac{\Delta^i U(t_0)}{i!},$$

где $t_i = t_0 + i\Delta t$ и $x = \frac{t-t_0}{\Delta t}$, $\Delta^i U(t_0)$ означает i -ю разность функции U .

При $t \in (t_0, t_n)$ и $n = 3$ остаточные члены оцениваются следующими соотношениями:

$$|R_1(t)| \leq |\omega_3^{(1)}(t)| \frac{\max_t |U^{(4)}(t)|}{4!};$$

$$|R_2(t)| \leq |\omega_3^{(2)}(t)| \frac{\max_t |U^{(4)}(t)|}{4!},$$

где

$$\omega_3^{(1)}(t) = 4t^2 + 3a_1t^2 + 2a_2t + a_3;$$

$$\omega_3^{(2)}(t) = 12t^2 + 6a_1t + 2a_2;$$

$$a_1 = -(t_0 + t_1 + t_2 + t_3);$$

$$a_2 = (t_0t_2 + t_0t_3 + t_1t_2 + t_1t_3 + t_0t_1 + t_2t_3);$$

$$a_3 = -(t_0t_1t_2 + t_0t_1t_3 + t_0t_2t_3 + t_1t_2t_3).$$

Однако надо заметить, что аппроксимация (3.7) содержит погрешность

$$|R_3(t + \Delta t)| \leq \left| \Delta t \max_t \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{U}^2} \right) \right|$$

даже при точных значениях U , $\dot{U}$, т.е. такая линейаризация F по t , U и $\dot{U}$ дает лишь первый порядок точности. С целью уменьшения требований к величине шага полезно вычисление $F_{t+\Delta t}$ на каждом шаге итеративно, причем в качестве первого приближения необходимо принять (3.7).

3.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗРЯЖЕННЫХ МАТРИЦ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Разряженными называются матрицы, имеющие небольшой процент ненулевых элементов. Практически матрицу можно считать разряженной, если число ее ненулевых элементов имеет тот же порядок, что и ее размерность. В работе [28] приведены алгоритмы и теоремы для разряженных матриц, позволяющие минимизировать заполнение и уменьшить затраты машинного времени при решении задач линейной алгебры. Разряженные матрицы получаются и в результате применения метода конечных элементов. Правда, многие авторы старались привести их к специальному виду разряженных матриц — ленточному. В книге [22] рассмотрены два случая ленточных матриц: первый — ленточные матрицы с постоянной шириной ленты, второй — с переменной.

В конструкциях вибродвигателей часто применяются кольцевые цилиндрические или сферические пьезопреобразователи. Получение наименьшей ширины ленты для циклических конструкций — сложная, а для трехмерных элементов — практически невозможная задача. В гл. 5 приведена конечноэлементная мо-

дель вибродвигателя с цилиндрическим возбудителем. Глобальные матрицы жесткости и масс такого возбудителя содержат по 36 ненулевых элементов в каждой строке, а минимальная ширина ленты не менее 80. Для сферических конструкций это отношение получается еще большим.

Применение разряженных матриц в расчетах вибродвигателей позволяет не только сэкономить оперативную память ЭВМ, но и упростить такие операции как составление глобальных матриц с учетом граничных условий, автоматизировать разбиение среды на элементы. При использовании разряженных матриц нумерация узлов конструкции может быть произвольной, т.е. удобной для пользователя, кроме того, отпадает необходимость использовать программы, оптимизирующие ширину ленты.

Существует несколько возможных способов хранения разряженных матриц в памяти ЭВМ. Обычно ненулевые элементы матрицы хранятся в одномерном массиве, а индексы — в массиве контрольной информации. Рассмотрим два вида хранения разряженных матриц.

1. В массиве контрольной информации последовательно в упакованном формате хранится сначала количество ненулевых элементов в каждой строке, а потом также в упакованном формате — номера столбцов ненулевых элементов.

2. Каждому ненулевому элементу данной разряженной матрицы ставится в соответствие целое число λ_{ij} вида

$$\lambda_{ij} = i + j10^4; a_{ij} \neq 0,$$

где i, j — номера строки и столбца ненулевого элемента; a_{ij} — ненулевой элемент матрицы.

Так, например, матрица

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

в первом случае будет храниться в двух массивах реального типа А и целого типа М:

$$\text{Массив А: } 1, 2, 2, 3, 1, 1$$

$$\text{Массив М: } 40003, 6, 20002, 10001, 10003, 10002, 30002$$

Таким образом, в первом элементе массива М хранится число строк и столбцов матрицы, во втором — число ненулевых элементов, далее в пятом полуслове — число ненулевых элементов в первой строке и т. д. Дальше хранятся номера столбцов ненулевых элементов, в массиве М не должно быть пропусков.

Одним из недостатков указанного метода хранения разряженных матриц является сложность динамического их формирования, так как надо заранее знать количество ненулевых элементов в каждой строке матрицы. Однако их количество становится известным, как правило, после составления глобальной матрицы с учетом граничных условий для узлов,

Второй метод хранения свободен от указанных выше недостатков, так как расположение ненулевых элементов в массиве А безразлично. Это значит, что если в первом случае ненулевые элементы хранятся в зависимости от вектора контрольной информации, то во втором наоборот — от расположения ненулевых элементов зависит структура вектора контрольной информации.

Первые два элемента вектора контрольной информации М совпадают для обоих видов хранения, а остальные:

Массив А: 1, 2, 1, 2, 1, 3

Массив М: 40003, 6, 40002, 10003, 10001, 20001, 30003, 20002

Представление разреженной матрицы вторым образом неоднозначно и зависит от предыстории ее формирования. Та же матрица может храниться и так:

Массив А: 1, 2, 2, 1, 1, 3

Массив М: 40003, 6, 10001, 20001, 10002, 40002, 30003, 20002

Благодаря беспорядочному хранению элементов разреженной матрицы, намного проще осуществляется ее формирование в процессе счета. Для некоторых специальных случаев, а также для экономии машинного времени при выполнении трудоемких операций, массивы А и М сортируются по возрастанию значений элементов М, начиная с третьего, т. е. производится упорядочение по возрастанию индексов. После сортировки матрица хранится так:

Массив А: 1, 2, 2, 3, 1, 1

Массив М: 40003, 6, 10001, 10002, 20001, 20002, 30003, 40002

Теперь элементы массива А совпадают с первым способом хранения, а для сопряжения с первым видом хранения достаточно видоизменить вектор контрольной информации.

Количество памяти для хранения всей разреженной матрицы зависит от числа ненулевых элементов k и порядка матрицы N . Так, для первого способа хранения число машинных слов $N_{сл}$ определяется по формуле

$$N_{сл} = k + 2 + (N + k) / 2,$$

а для второго случая —

$$N_{сл} = 2(k + 1)$$

и не зависит от размерности матрицы.

Так как в методе конечных элементов почти всегда получаются симметричные матрицы, количество машинных слов уменьшается почти наполовину.

Следует отметить и определенную экономию машинного времени при использовании разреженных матриц. Во многих алгоритмах надо производить два цикла: по строкам и по столбцам матрицы. Учитывая разреженность, при программной реализации таких операций эти два цикла заменяются одним: по коли-

честву ненулевых элементов. Примером может служить программа умножения разреженной матрицы (А, М) на константу В:

SUBROUTINE FIESMP (A, M, B)

DIMENSION A (1), M (1)

K = M (2)

DO 11 = 1, K

1A (1) = A (1) * B

RETURN

END

Также очень просто реализуется алгоритм формирования глобальных матриц ансамбля. В массив А записываются только те величины, которые должны участвовать в вычислениях, а в вектор контрольной информации — индексы, словно совершенно не учитывались граничные условия. На втором этапе рассматриваются все элементы вектора контрольной информации с учетом граничных условий узлов. Начиная с некоторого индекса, значения элементов вектора контрольной информации уменьшаются на величину 10001.

В последнее время все больше внимания уделяется итерационным методам решения систем алгебраических уравнений. В предыдущем параграфе представлено рекуррентное соотношение для интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений. На каждом шаге надо решать систему линейных алгебраических уравнений. Учитывая тот факт, что при изменении времени на шаг интегрирования вектор перемещений изменяется мало, можно использовать итерационный метод. Для получения решения в точке $t + \Delta t$ за начальное приближение следует взять значение вектора перемещения в точке t . В таком случае сходимость получается намного быстрее и требуется намного меньше необходимых итераций.

Кроме того, итерационные методы легко программируются для разреженных матриц. Особенно просто и эффективно используется метод наискорейшего спуска с покомпонентной релаксацией, при этом операции выполняются только с ненулевыми элементами.

Для уравнения $[A]x = b$ вычисляются невязки при заданных начальных приближениях $x^{(j)}$:

$$f_i^{(j)} = \sum_{k=1}^n A_{ik} x_k^{(j)} - b_i, \quad (3.9)$$

где j — номер итерации.

Вычисляются следующие значения переменных:

$$x_i^{(j+1)} = x_i^{(j)} - \frac{\sum_{k=1}^n (f_k^{(j)})^2}{\sum_{k=1}^n \sum_{n=1}^n A_{kn} f_k^{(j)} f_n^{(j)}} f_i^{(j)}. \quad (3.10)$$

Далее находится максимальная по амплитуде величина невязки $f_k^{(j+1)}$ и вычисляется значение $x_k^{(j+2)}$ по следующей формуле:

$$x_k^{(j+2)} = x_k^{(j+2)} - f_k^{(j+1)} / A_{kk}.$$

Вычисление всех невязок по формуле (3.9) можно произвести за один цикл по ненулевым элементам. Аналогично за один цикл вычисляется знаменатель формулы (3.10). Для реализации этого метода кроме самой матрицы, требуется еще три вектора размерностью, равной порядку матрицы A .

Глава 4

ВИБРОДВИГАТЕЛИ С ДИСКРЕТНЫМ КОНТАКТОМ

4.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИБРОДВИГАТЕЛЯ

Описание конструкции вибродвигателя. На рис. 4.1 показана схема вибродвигателя, состоящего из входного звена — поляризованного по толщине стенки пьезокерамического пьезопреобразователя 1 и выходного звена — ротора 3. Электроды 2 пьезопреобразователя разделены на шесть одинаковых секторов по всей составляющей цилиндрической поверхности таким образом, чтобы подключенное к электродам переменное электрическое напряжение на смежных секторах создавало бы противоположно направленное электрическое поле. С целью обеспечения взаимодействия входного и выходного звеньев ко входному звену симметрично по окружности в трех точках прикреплены контактные элементы 4, упирающиеся в ротор.

Выбор трех контактных элементов обусловлен конструктивными соображениями, так как при этом обеспечивается равномерное и надежное их контактирование с поверхностью выходного звена. Месторасположение первого контактного элемента по окружности выбирается из расчета оптимального соотношения радиальной и тангенциальной компонент амплитуды его колебаний, т. е. сдвинуто на определенное расстояние от места деления электродов. Так как колебание контактного элемента в аксиальном направлении нежелательно, они располагаются на срединном сечении цилиндра, т. е. точки их крепления делят составляющую цилиндра пополам.

Выбор глобальной системы координат. Так как толщина стенки рассматриваемого пьезопреобразователя существенно меньше других его измерений, для построения конечноэлементной модели выбраны прямоугольные КЭ оболочки (см. п. 1.4). Однако для представления круговой цилиндрической оболочки более удобно вместо декартовых координат (x, y, z) воспользоваться цилиндрическими координатами (ρ, φ, A) .

Установим связь между узловыми перемещениями одного узла КЭ в декартовой и цилиндрической системах координат.

Пусть узловыми перемещениями одного узла КЭ в декартовой и цилиндрической системах координат являются соответственно

$$U^D = (u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z); \quad (4.1)$$

$$U^C = (\xi, \zeta, \eta, \theta_\rho, \theta_A, \theta_v). \quad (4.2)$$

Значения величин в уравнениях (4.1) и (4.2) пояснены на рис. 4.2.

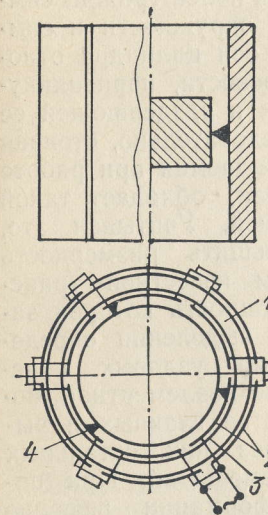


Рис. 4.1. Схема кольцевого вибродвигателя

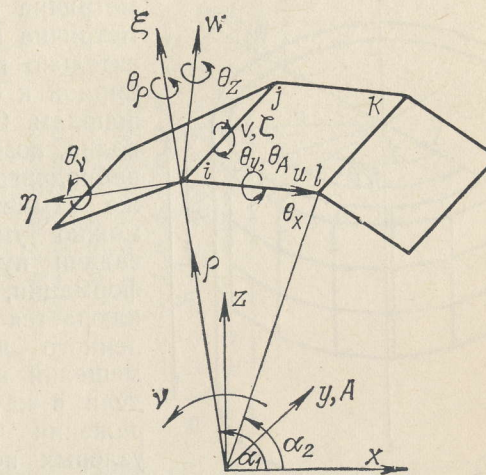


Рис. 4.2. Прямоугольный КЭ в цилиндрической системе координат

Тогда связь между векторами узловых перемещений КЭ в декартовой и цилиндрической системах координат имеет вид

$$U^D = [T] U^C,$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} [L(\alpha_1)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [L(\alpha_2)] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [L(\alpha_2)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [L(\alpha_1)] \end{bmatrix};$$

$$[L(\alpha)] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

предполагая нумерацию узлов КЭ от левого нижнего угла по часовой стрелке.

Матрицы жесткости и масс КЭ в цилиндрической системе координат определяются по формулам:

$$[K^u] = [T]^T [K^D] [T] \text{ и } [M^u] = [T]^T [M^D] [T],$$

где $[K^D]$, $[M^D]$ — структурные матрицы КЭ в декартовой системе координат.

Преобразование к модели с одним контактным элементом. Из рис. 4.1 нетрудно заметить, что конструкция вибродвигателя

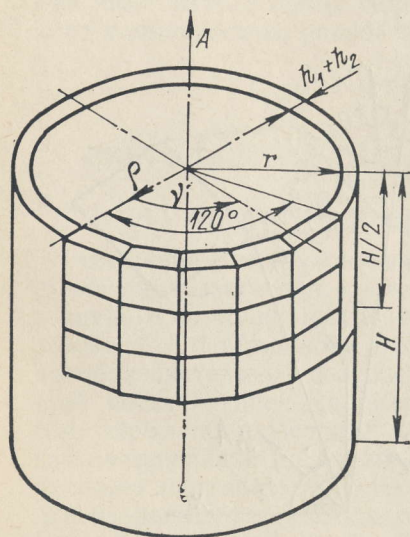


Рис. 4.3. Конечноэлементная дискретизация входного звена:

H — высота входного звена; h_1 и h_2 — толщина пьезокерамического и металлического слоев соответственно

и конфигурация приложенных электрических полей трижды симметрична по окружности и симметрична по оси цилиндра относительно плоскости, перпендикулярной к оси и разделяющей ее пополам. Следовательно, стоячая волна, возбуждаемая при работе вибродвигателя, обладает такой же симметрией. Учитывая это, можно уменьшить размерность задачи путем известной трансформации, сущность которой заключается в выделении определенного числа узловых перемещений конечноэлементной модели в качестве главных и выражении через них остальных узловых перемещений. При помощи трансформации решение задач о перемещениях всей конечноэлементной модели входного звена может быть сведено к рассмотрению перемещений его части, выделенной на рис. 4.3 жирной линией.

Приняв узловые перемещения U выделенной части пьезопреобразователя в качестве главных, вектор узловых перемещений $\bar{U}$ с учетом симметрии можно записать в виде

$$\bar{U} = [L] U,$$

где $[L]$ — матрица трансформации, определяемая при помощи соотношений

$$[L] = \begin{bmatrix} [Q] \\ [Q] \\ [Q] \end{bmatrix};$$

$$[Q] = \left\{ \begin{bmatrix} [R] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [R] & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & [R] \end{bmatrix} \right\}^{n/3};$$

$$[R]^T = \begin{bmatrix} [I] & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & [J] \\ 0 & [I] & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 & [J] & \\ 0 & & & [I] & [S] & [J] & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[J] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь n — общее число узлов по окружности; m — общее число узлов по составляющей пьезопреобразователя, причем n должно быть кратным 3, а m — нечетным. Итоговые матрицы жесткости и масс принимают вид

$$[K] = [L]^T [K^u] [L]; \quad [M] = [L]^T [M^u] [L].$$

Аналогично могут быть трансформированы векторы узловых усилий и коэффициенты жесткости и вязкого трения реологической модели окрестности точки контактирования (рис. 4.4):

$$\{F^A\} = [L]^T \{F^A\}; \quad c_N = 6\bar{c}_N; \quad c_T = 6\bar{c}_T; \quad k_N = 6\bar{k}_N; \quad k_T = 6\bar{k}_T,$$

где $\{F^A\}$ — вектор узловых усилий, а $\bar{c}_N$, $\bar{c}_T$, $\bar{k}_N$, $\bar{k}_T$ — коэффициенты вязкого трения и жесткости реологической модели в нормальном и тангенциальном направлениях соответственно.

Таким образом, задача о движении модели вибродвигателя, изображенной на рис. 4.1, сводится к задаче о движении модели вибродвигателя с одним контактным элементом. Уравнения движения всей модели записываются по методике, изложенной в гл. 2. При этом в настоящем случае нетрудно выбрать глобальную систему координат, совпадающую с локальной системой координат площадки контактирования.

Обозначив силы нормального и тангенциального взаимодействия в контактной точке F_N^{AB} , F_N^{BA} , F_T^{AB} , F_T^{BA} соответственно, и

принимая, что выходное звено вибродвигателя нагружено моментом сопротивления M_c , а при вращении выходного звена действуют силы вязкого трения с коэффициентом b , система

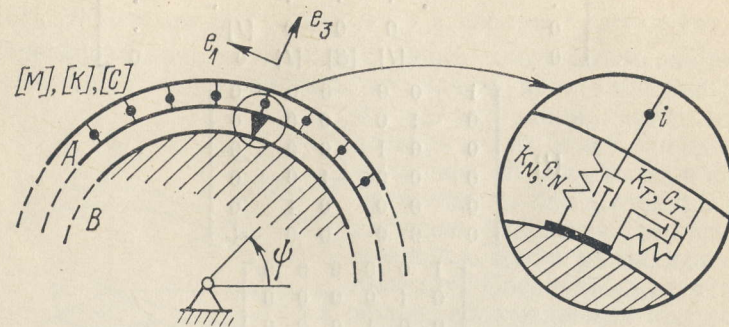


Рис. 4.4. Конечноэлементная модель вибродвигателя в окрестности точки контактирования

дифференциальных уравнений движения вибродвигателя имеет вид

$$[M^A] \ddot{U} + [C^A] \dot{U} + [K^A] U = \begin{Bmatrix} \vdots \\ F_N^{AB} \\ F_T^{AB} \\ \vdots \end{Bmatrix} + F^A; \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} 1(U_{iN}, \delta_3, G, F_N^{BA})(c_N \dot{\delta}_3 + k_N \delta_3) &= F_N^{AB}; \\ c_T \dot{\delta}_1 + k_T \delta_1 &= F_T^{AB}; \\ F_T^{BA} &= -k_c F_N^{BA} \operatorname{sign}(\dot{U}_{iT} - \dot{\delta}_1 - R\dot{\psi}); \\ F_T^{AB} &= -F_T^{BA}; \\ F_N^{AB} &= -F_N^{BA}; \\ 1(U_{iN}, \delta_3, G, F_N^{BA})(U_{iN} - \delta_3 - G) &= 0; \\ J\ddot{\psi} + b\dot{\psi} &= M_c + F_T^{AB}R, \end{aligned}$$

где i_N, i_T — номера степеней свободы в конечноэлементной модели входного звена, соответствующие нормальному и тангенциальному перемещениям контактного элемента.

4.2. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ВХОДНОГО ЗВЕНА ВИБРОДВИГАТЕЛЯ

Расчет колебаний входного звена вибродвигателя требует сравнительно небольших затрат времени ЭВМ. Между тем по его результатам можно предсказать некоторые характеристики

колебаний в рабочем режиме вибродвигателя взаимодействия звеньев. Пьезокерамические преобразователи, используемые в качестве входных звеньев вибродвигателей, обычно обладают высокой добротностью, т. е. острой резонансной кривой. Поэтому как в свободном, так и в рабочем режимах возбуждение осуществляется на частоте, близкой к резонансной. Характер перемещений узловых точек, определяющий амплитуды стоячей волны, в режиме безударных колебаний также близок к характеру перемещений рабочего режима.

Динамика тонкостенного пьезокерамического цилиндра, конечноэлементная модель которого представлена на рис. 4.3, здесь описывается в рамках теории тонкостенных оболочек, и, естественно, собственные его колебания отличаются наличием преимущественно радиальных, тангенциальных, аксиальных мод колебаний. При вынужденных колебаниях пьезопреобразователя в нем возбуждаются стоячие волны, причем одновременно могут возбуждаться волны, определяемые перемещениями точек в радиальном, тангенциальном и аксиальном направлениях; узлы волн при этом в общем случае не совпадают. Поэтому будем рассматривать возбуждение в пьезопреобразователе радиальных, тангенциальных и аксиальных волн и зависимости их амплитуд от параметров пьезопреобразователя.

Ниже приводятся результаты расчета собственных и вынужденных колебаний входного звена — пьезопреобразователя, стенка которого является биморфной, состоящей из радиально поляризованного пьезокерамического слоя толщиной h_1 и металлического слоя толщиной h_2 . Расчеты выполнены для слоев из пьезокерамики титаната бария и алюминия. Использованы следующие константы пьезоматериала: $s_{11}^E = 8,55 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$; $s_{12}^E = 2,61 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$; $s_{66}^E = 8,93 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$; $e_{31} = -13,3 \text{ К/м}^2$; $k_{31} = 0,208$; $\rho = 5700 \text{ кг/м}^3$.

На рис. 4.5 представлены зависимости первых четырех собственных частот, соответствующих модам, обладающим вышеупомянутой симметрией, от высоты H и толщины стенки h_1 пьезопреобразователя в случае $h_2 = 0$. При высотах, меньших $0,5r$ (здесь r — средний радиус цилиндра), расчет следует проводить в двумерной системе координат (ρ, ν) , так как пространственная модель в этом случае обладает плохой сходимостью,

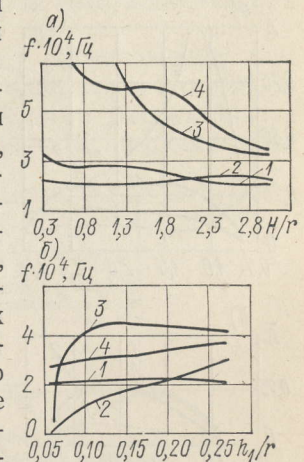


Рис. 4.5. Зависимости собственных частот цилиндрического вибродвигателя от H/r при $h_1/r = 0,21$ (а) и от h_1/r при $H/r = 2,46$ (б); 1 — первая аксиальная мода; 2 — третья радиальная мода; 3 — вторая аксиальная мода; 4 — третья тангенциальная мода

По зависимостям такого типа можно подобрать параметры, позволяющие обеспечить рабочую частоту вибродвигателя в желаемом диапазоне. Например, часто желательно рабочую частоту вибродвигателя поддерживать в пределах 30—100 кГц, так как при более высоких частотах трудно возбудить амплитуды колебаний достаточной величины из-за диссипации энергии за счет внутреннего трения, а при слишком низких частотах вибродвигатель работает с акустическим шумом, слышимым ухом человека. Результаты расчета показывают, что при колебаниях на собственной частоте третьей, преимущественно тангенциальной, моды амплитуда стоячей волны в тангенциальном направлении приблизительно в 3 раза больше амплитуды в радиальном направлении. При колебаниях на третьей радиальной собственной частоте тангенциальная амплитуда приблизительно в 3 раза меньше радиальной. Так как в большинстве случаев крутящий момент, создаваемый вибродвигателем, и скорость движения выходного звена в основном определяются амплитудой тангенциальных колебаний, наиболее подходящей для использования в вибродвигателе является третья, преимущественно тангенциальная, мода. Однако, как показывает анализ зависимостей на рис. 4.5, собственные частоты тангенциальных мод обычно высоки (в 3—4 раза выше собственных частот радиальных мод), и в реальных пьезопреобразователях получение достаточно больших амплитуд колебаний затруднительно. Поэтому в

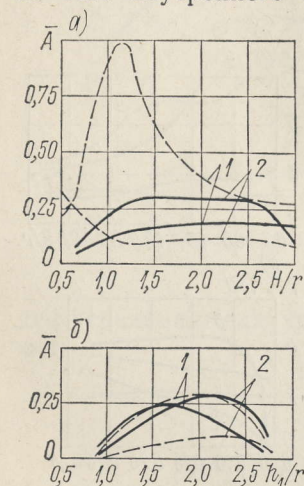


Рис. 4.6. Зависимости амплитуд стоячих волн вынужденных колебаний от H/r при $h_1/r = 0,21$ (а) и от h_1/r при $H/r = 2,46$ (б);

— амплитуды радиальных волн, --- амплитуды тангенциальных волн: 1—третья тангенциальная мода; 2—третья радиальная мода

случае цилиндрических пьезопреобразователей с малой высотой ($H/r < 0,5$) целесообразно использование третьей радиальной моды, возбуждаемой при помощи введения металлического слоя.

При $H/r > 0,5$ возможно использование третьей тангенциальной моды, так как ее собственная частота с увеличением H существенно снижается. На рис. 4.6 приведены зависимости амплитуд стоячей волны при вынужденных колебаниях пространственной модели пьезопреобразователя, причем амплитуды волны рассматриваются в сечении цилиндра, делящем составляющую пополам, т. е. по линии крепления контактных элементов. Частоты возбуждения при получении зависимостей 1 и 2 приняты равными собственным частотам соответствующих мод колебаний. Из зависимостей на рис. 4.6, а следует, что существует ярко выраженное оптимальное отношение высоты и радиуса

цилиндра $H/r \approx 1$, при котором наиболее эффективно возбуждаются тангенциальные колебания. Наиболее эффективное возбуждение радиальных колебаний наблюдается при $H = (1,5 \div 2)r$, поэтому работа пьезопреобразователя в качестве входного звена вибродвигателя эффективна при $H = (1 \div 1,5)r$.

Из зависимостей величин составляющих амплитуды колебаний от толщины стенки пьезопреобразователя (рис. 4.6, б) следует, что колебания наибольшей амплитуды возбуждаются при толщине стенки $h_1 \approx 0,2r$.

При решении вопросов о выборе мест расположения контактных элементов на входном звене вибродвигателя и о выборе точек закрепления входного звена необходимо рассматривать взаимное расположение узловых точек стоячих волн радиальных

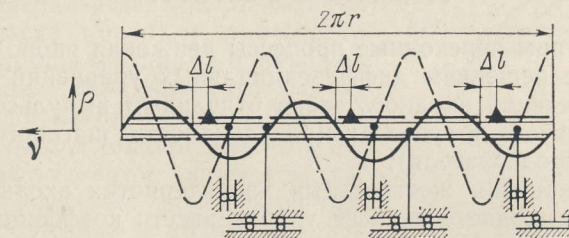


Рис. 4.7. Формы радиальной и тангенциальной волн и месторасположение контактных элементов и точек закрепления

и тангенциальных колебаний по окружности. На рис. 4.7 пунктирной линией показаны амплитуды колебаний в тангенциальном, а сплошной — в радиальном направлениях точек окружности пьезопреобразователя малой высоты $H \ll r$ при возбуждении в нем стоячих волн (окружность на рис. 4.7 показана развернутой в прямую).

Узлы радиальной и тангенциальной волн смещены относительно друг друга на $1/4$ длины волн, поэтому по окружности нет ни одной неподвижной точки. При этом узлы радиальной составляющей совпадают с местами разделения электродов. Сдвиг между месторасположениями узловых точек радиальной и тангенциальной волн определяет типы возможных закреплений такого пьезопреобразователя, которые должны закреплять лишь по одному направлению (радиальному либо тангенциальному). Допускается также использование упругих закреплений. В случае цилиндрического пьезопреобразователя высоты $H \geq 0,5r$ вопрос закрепления решается проще, так как здесь существуют узловые точки по всем составляющим амплитуды колебаний, в которых возможно жесткое закрепление пьезопреобразователя.

Месторасположение контактных элементов выбирается между узлами радиальной и тангенциальной компонент с целью обеспечения косоугольного их соударения с поверхностью выходного звена. Угол соударения зависит от величины Δl смещения кон-

тактного элемента от узла радиальной волны, т. е. от соотношения составляющих амплитуды колебаний контактного элемента. Однако, как будет показано в дальнейшем, это соотношение в рабочем режиме вибродвигателя может существенно меняться в зависимости от поверхностной жесткости выходного звена, силы начального нормального взаимодействия между звеньями (натяга) и от некоторых других параметров, поэтому при рассмотрении вопроса о подборе оптимальной величины Δl необходимо исследование динамики вибродвигателя в целом.

4.3. РАСЧЕТ ВИБРОДВИГАТЕЛЯ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ВХОДНОГО ЗВЕНА ОТДЕЛЬНЫМ ИМПУЛЬСОМ

Рассмотрим переходные процессы движения вибродвигателя, полученные решением дифференциальных уравнений движения при возбуждении входного звена отдельным импульсом формы синусоидальной полуволны (разновидность шагового режима работы вибродвигателя).

Для сравнения жесткостных характеристик входного и поверхности выходного звеньев удобно ввести коэффициент жесткости входного звена k_U по направлению нормали к площадке контактирования, численно равный величине силы, приложенной к входному звену в нормальном направлении в точке крепления контактного элемента и обеспечивающей единичное смещение этой точки.

При исследовании движения вибродвигателя под воздействием одного импульса введем величину δ_N , обозначающую смещение контактного элемента от положения равновесия в нормальном направлении при подключении к электродам пьезопреобразователя постоянного электрического напряжения величины, равной амплитуде импульса. В начальном положении, т. е. в случае отсутствия колебаний, входное звено упирается в поверхность выходного звена и находится в деформированном состоянии, за счет чего образуется начальная сила взаимодействия между звеньями, или натяг. Характеристикой такого натяга служит величина нормального смещения G контактирующей точки входного звена от ее положения в случае недеформированного состояния входного звена.

Нижеприводимые зависимости построены с использованием следующих безразмерных величин: времени $\bar{t} = t\omega_0$, продолжительности импульса $\bar{\tau} = \tau\omega_0$; характеристики предварительного натяга $\bar{G} = G/\delta_N$, смещения контактного элемента в нормальном направлении $\bar{U}_{iN} = U_{iN}/\delta_N$; силы нормального взаимодействия $\bar{F}_{iN}^{BA} = F_{iN}^{BA}/\delta_N k_U$; момента инерции выходного звена $\bar{J} = J\omega_0^2/\delta_N k_U R$.

На рис. 4.8 приведен процесс изменения нормального смещения контактного элемента $\bar{U}_{iN}$ в течение времени одного соуда-

рения и соответствующий процесс передачи нормального направленного импульса $\bar{f} = \int_0^t F_{iN}^{BA} dt$ в течение времени соударе-

ния при различных характеристиках реологической модели поверхности выходного звена. Сопоставление кривых 1 и 2 показывает, что жесткость реологической модели практически не влияет на величину импульса, однако при большей жесткости более активно возбуждаются высшие гармоники колебаний входного звена. Увеличение коэффициента вязкого трения реологической модели c_N снижает величину импульса (кривая 3). Применение абсолютно жесткой идеализации поверхности выходного звена приводит к результатам, свидетельствующим о заниженных значениях передаваемого импульса, несмотря на отсутствие в математической модели дополнительных диссипативных элементов (кривая 4). Полученный результат обусловлен тем, что при отсутствии в модели контактной упругости процесс удара может быть представлен в виде бесконечной последовательности ударов с уменьшающимся промежутком между ними. Это влечет за собой участие в процессе соударения бесконечного числа мод колебаний соударяющихся тел. Как известно, конечноэлементная модель способна представлять лишь конечное число мод, поэтому суммарное значение ударного импульса получается заниженным.

Степень заниженности определяется числом мод, представляемых конечноэлементной моделью, поэтому увеличение числа КЭ в модели снижает погрешность вычисления. Отсюда следует, что характерным свойством математической модели абсолютно жесткой поверхности выходного звена является занижение величины ударного импульса и тем самым погрешности в результатах вычислений. Поэтому при расчетах предпочтительна модель с реологией поверхности в зоне контактирования звеньев. Применение абсолютно жесткой модели оправдано лишь в случаях, когда большая разница в порядках величин коэффициентов k_U , k_N приводит к затруднениям численного интегрирования системы дифференциальных уравнений.

На рис. 4.9 представлены зависимости характеристик движения вибродвигателя в шаговом режиме от продолжительности импульса возбуждения предварительного натяга. Здесь параметры импульса возбуждения подбираются так, что при увели-

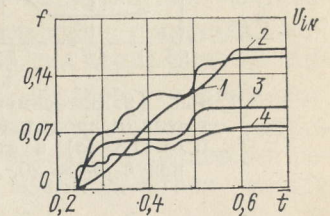


Рис. 4.8. Временные зависимости движения контактного элемента в нормальном направлении и передачи ударного импульса во время одного соударения контактных пар вибродвигателя: $G = 0$;

1 — $k_N/k_U = 200$ и $c_N = 0$;
2 — $k_N/k_U = 2000$ и $c_N = 0$;
3 — $k_N/k_U = 2000$ и $c_N\omega_0/k_N = 0,0133$; 4 — абсолютно жесткая поверхность выходного звена

чении продолжительности τ амплитуда уменьшается настолько, чтобы площадь импульса, т. е. произведение его длины и амплитуды, оставалась постоянной, а сам импульс имел форму

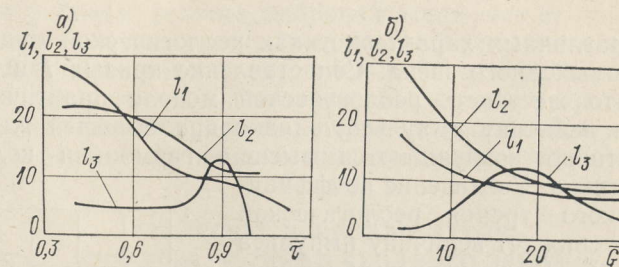


Рис. 4.9. Зависимости характеристик работы вибродвигателя от продолжительности импульса возбуждения при $\bar{G} = 17,8$ (а) и от величины натяга при $\bar{\tau} = 0,86$ (б) при $k_N/k_U = 20$, $J = 0,178 \times 10^{-5}$, $c_N = 0$, $\bar{\tau} = 0,86$

синусоидальной полуволны. Из приведенных зависимостей следует вывод, что характеристика вибродвигателя l_3 имеет максимальные значения при определенных величинах $\bar{\tau}$ и $\bar{G}$, а между тем зависимости l_1 , l_2 от тех же параметров носят монотонный характер (характеристики l_1 — l_3 описаны в гл. 2). Наиболее благоприятная длина импульса возбуждения для получения качественного шагового режима составляет 0,8—0,9 периода соб-

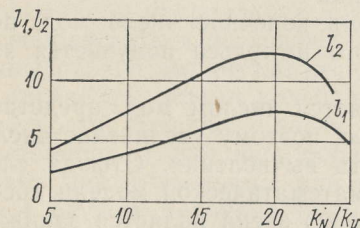


Рис. 4.10. Зависимости характеристик работы вибродвигателя от коэффициента жесткости реологической модели при $J = 0,178 \times 10^{-5}$, $\bar{G} = 17,8$, $c_N = 0$, $\bar{\tau} = 0,86$

ственной частоты колебаний третьей тангенциальной моды входного звена.

Зависимости l_1 и l_2 от отношения коэффициентов k_N/k_U (рис. 4.10) показывают, что для наиболее благоприятного режима работы вибродвигателя необходима определенная жест-

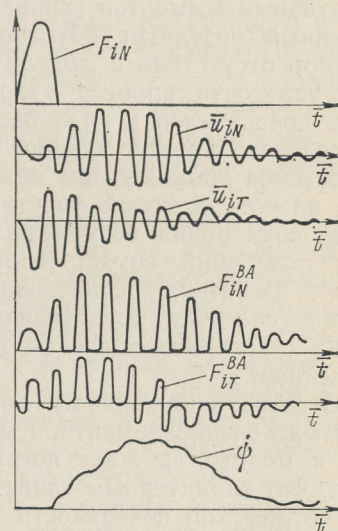


Рис. 4.11. Изменение во времени величин, описывающих работу вибродвигателя в шаговом режиме при $k_N/k_U = 20$, $J = 0,178 \times 10^{-5}$, $\bar{G} = 17,8$, $\bar{\tau} = 0,86$, $c_N = 0$

кость поверхности. При недостаточной ее жесткости выходное звено плохо принимает движущее воздействие косоуго удар, так как оно не способно оказать ощутимое обратное воздействие входному звену. При больших жесткостях выходного звена сильно возбуждаются высшие моды, в результате чего возникающее большое число ударных импульсов теряет свою направленность в среднем и не обеспечивает удовлетворительной работы вибродвигателя в шаговом режиме.

На рис. 4.11 представлены временные зависимости импульса возбуждающего узлового усилия в точке крепления контактного элемента $F_{iN}^A(t)$, изменения нормальной и тангенциальной координат контактного элемента U_{iN} , U_{iT} , сил нормального и тангенциального взаимодействия F_{iN}^{BA} , F_{iT}^{BA} и скорости движения выходного звена $\dot{\phi}$. Зависимости показывают, что «шаг» вибродвигателя формируется за все время переходного процесса в результате направленного в среднем взаимодействия между звеньями вибродвигателя.

4.4. РАСЧЕТ ВИБРОДВИГАТЕЛЯ СО СТЕРЖНЕВЫМ ВХОДНЫМ ЗВЕНОМ В РЕЖИМЕ НЕПРЕРЫВНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА

В настоящем разделе приводятся результаты расчета по МКЭ вибродвигателя со стержневым пьезокерамическим входным звеном A и выходным звеном — ротором B [24] (рис. 4.12). Так как контактирование между звеньями вибродвигателя здесь осуществляется в единственной точке, нетрудно заметить, что такая модель описывается системой (4.3). Расчет проведен для вибродвигателя, обладающего следующими жесткостными и электромеханическими характеристиками:

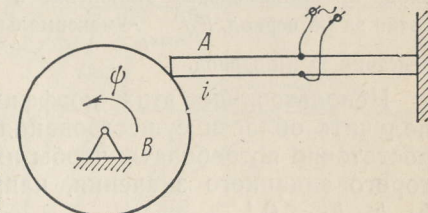


Рис. 4.12. Схема вибродвигателя со стержневым входным звеном

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0,826 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2; \quad d_{31} = 113 \times 10^{-12} \text{ К/Н}; \\ \tau_{33} &= 8,85 \times 10^{-9} \text{ Ф/м}; \quad k_{31} = 0,34; \quad k_U = 1,22 \times 10^4 \text{ Н/м}; \\ k_N &= k_T = 1,7 \times 10^6 \text{ Н/м}; \quad c_N = c_T = 0. \end{aligned}$$

Для расчета вибродвигателя в режиме непрерывного движения выходного звена необходимо численное интегрирование дифференциальных уравнений конечноэлементной модели вибродвигателя на промежутке времени, достаточном для затухания переходных процессов. В зависимости от добротности пьезопреобразователя, этот промежуток может оказаться во много раз больше периода возбуждения. Поэтому в таких слу-

чаях приходится значение коэффициента демпфирования материала входного звена, используемого при получении матрицы демпфирования [C], искусственно принимать завышенным, чтобы сократить время затухания переходных процессов и получить приближенные сведения о характере динамических свойств реального вибродвигателя.

В зависимости от частоты колебаний, силы натяга и некоторых других факторов возможна работа вибродвигателя как в основном (одно контактирование между звеньями за один период возбуждения), так и в комбинированных режимах. Для оценки режима работы вибродвигателя вводятся следующие коэффициенты:

$$k_A = \sum_{i=1}^s |\bar{A} - A_i| / \bar{A}; \quad k_a = \sum_{i=1}^s |\bar{a} - a_i| / \bar{a};$$

$$k_f = \sum_{i=1}^s |\bar{F}_{N_{\max}}^{BA} - F_{N_{\max i}}^{BA}| / \bar{F}_{N_{\max}}^{BA},$$

$$\text{где } \bar{A} = \frac{1}{s-l} \sum_{i=1}^s A_i, \quad \bar{a} = \frac{1}{s-l} \sum_{i=1}^s a_i, \quad \bar{F}_{N_{\max}}^{BA} = \frac{1}{s-l} \sum_{i=1}^s F_{N_{\max i}}^{BA} - \text{общее}$$

число периодов возбуждения, в течение которых интегрируются уравнения движения вибродвигателя; l — число периодов колебаний, необходимых для затухания переходных процессов (предполагается $l < s$); A_i — максимальное значение отклонения контактной точки от положения равновесия за i -й период; a_i — минимальное отклонение в нормальном направлении контактной точки за i -й период, $F_{N_{\max i}}^{BA}$ — максимальное значение нормальной силы взаимодействия за i -й период.

Использование этих коэффициентов позволяет формально получить области существования основного режима. Для этого достаточно потребовать, чтобы их значения не превышали некоторого заданного значения, например практически достаточно $k_A, k_a, k_f < 0,1$.

Все нижеприведенные зависимости получены лишь в области существования основного режима. При их построении использованы следующие безразмерные величины:

$$G = \bar{G}/a_0; \quad \bar{M}_k = M_{kc}/(Rk_U a_0); \quad \bar{N} = N_c/(k_U a_0); \quad \bar{\psi} = \psi_c R/(\omega_0 a_0);$$

$$\bar{\omega} = \omega/\omega_0; \quad a = a/a_0,$$

где $a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$, $a_0 = \sqrt{a_{N_0}^2 + a_{T_0}^2}$; ω_0 — собственная угловая частота колебаний входного звена в бесконтактном режиме (третьей тангенциальной моды в настоящем случае); ω_0 — угловая частота возбуждения; a_N, a_T — амплитуды колебаний контактной точки входного звена в бесконтактном режиме на частоте ω_0 в нормальном и тангенциальном направлениях соответственно; a_N, a_T — амплитуды колебаний контактной точки в рабочем режиме на частоте ω ; M_{kc}, N_c — средний крутящий момент и средняя сила контактного взаимодействия за один период колебаний.

Возбуждение осуществляется на частоте первой продольной моды колебаний, причем источник является настолько мощным,

что электрическое поле на всех КЭ можно считать заданным. Движение выходного звена принимается равномерным, т. е. принимается $\dot{\psi} = 0$. На рис. 4.13 приведены амплитудно-частотные характеристики колебаний контактной точки входного зве-

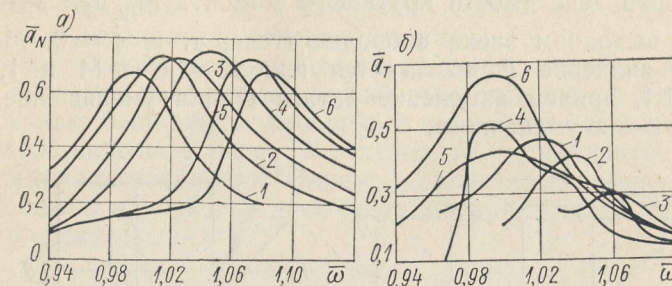


Рис. 4.13. Амплитудно-частотные характеристики колебаний контактной точки входного звена при $\dot{\psi} = 0$ в нормальном (а) и тангенциальном (б) направлениях:

1 — гармонические колебания в бесконтактном режиме; 2 — $\bar{G} = 3,37$; 3 — $\bar{G} = 6,73$; 4 — $\bar{G} = 10,1$; 5 — $\bar{G} = 13,5$; 6 — $\bar{G} = 16,8$

на, т. е. узловой точки свободного конца стержня при различных величинах начального натяга и заторможенном выходном звене, т. е. при $\dot{\psi} = 0$. По сравнению с амплитудно-частотной характеристикой бесконтактных колебаний в нормальном направлении при увеличении натяга $\bar{G}$ увеличивается резонансная частота колебаний.

Максимальная амплитуда колебаний в нормальном направлении при этом изменяется незначительно, а при увеличении натяга более крутой становится левая сторона характеристик. Амплитудно-частотная характеристика тангенциальных колебаний контактной точки носит более сложный характер. Пики тангенциальных характеристик не совпадают с соответствующими пиками нормальных характеристик, и их сдвиг от положения пика характеристики гармонических колебаний не имеет очевидной закономерности. Сами характеристики при увеличении натяга становятся более пологими.

На рис. 4.14 представлена часть области существования основного режима работы вибродвигателя (одно соударение за

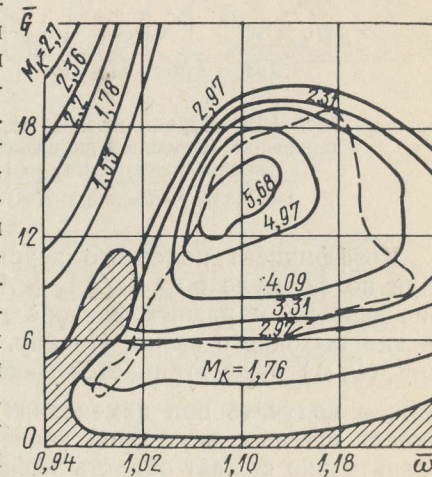


Рис. 4.14. Область существования основного режима

один период возбуждения), где заштрихованная зона представляет собой область, в которой коэффициенты $k_a, k_A, k_f > 0,1$, т. е. режим является субгармоническим либо комбинированным. Сплошные линии являются линиями уровня поверхности, изображающей зависимость крутящего момента M_k при заторможенном выходном звене вибродвигателя, т. е. $\bar{\psi} = 0$. Максимальное значение $\bar{P}$ достигается при $13 < \bar{G} < 14$ и $1,08 < \omega < 1,1$, причем изменение натяга $\bar{G}$ или уменьшение частоты его резко уменьшают.

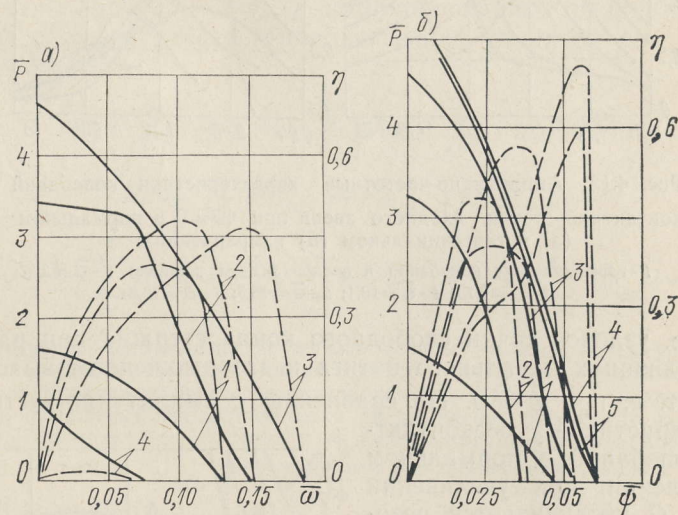


Рис. 4.15. Характеристики «крутящий момент — скорость движения» (сплошная линия) и зависимости КПД (пунктирная линия) при $\bar{\omega} = 1,03$ и $\bar{\omega} = 1,12$ (б):
1 — $\bar{G} = 3,37$; 2 — $\bar{G} = 6,73$; 3 — $\bar{G} = 10,1$; 4 — $\bar{G} = 13,5$; 5 — $\bar{G} = 16,8$

Коэффициент полезного действия вибродвигателя вычисляется по формуле $\eta = A_n / (A_n + A_r)$. Его значение непостоянно, оно зависит от разных факторов, в том числе от скорости движения выходного звена. На рис. 4.14 для каждой пары значений ($\bar{G}, \bar{\omega}$) рассматривается максимальное значение η , которое можно получить при изменении $\bar{\psi}$. Пунктирная линия ограничивает область, в которой значение КПД превышает 0,5, что значительно сужает область эффективных режимов работы вибродвигателя. Зависимости КПД и крутящего момента от скорости движения выходного звена приводятся на рис. 4.15 пунктирными и сплошными линиями соответственно. Следует отметить, что в области значений $13,5 < \bar{G} < 16,8$, $\bar{\omega} \approx 1,1$ КПД заметно возрастает при скоростях $\bar{\psi}$, близких к максимально достижимым для этой пары значений ($\bar{G}, \bar{\omega}$). Из этих зависимостей и из частотно-скоростных характеристик (рис. 4.16) также

следует, что максимальные скорости вращения ротора достигаются при сравнительно небольших натягах ($G < 10$) и имеют тенденцию к увеличению по мере приближения к границе области существования основного режима. На рис. 4.16 части характеристик, обозначенные пунктирной линией, не принадлежат области существования основного режима.

В заключение следует сделать несколько замечаний по поводу мелкости конечноэлементной дискретизации и шага интегрирования. В принципе этот вопрос не является сложным и достаточно широко освещен в литературе по применению МКЭ к динамическим задачам. Однако, учитывая специфику дифференциальных уравнений движения вибродвигателя, можно отметить следующее.

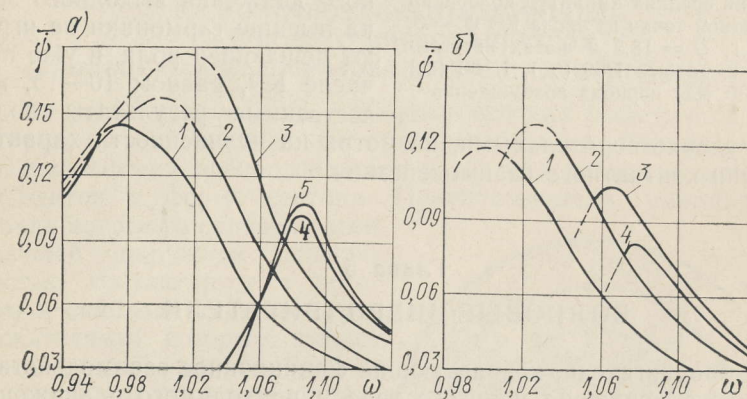


Рис. 4.16. Частотные скоростные характеристики вибродвигателя при постоянном крутящем моменте при $\bar{P} = 0,66$ (а) и $\bar{P} = 1,98$ (б):
1 — $\bar{G} = 3,37$; 2 — $\bar{G} = 6,73$; 3 — $\bar{G} = 10,1$; 4 — $\bar{G} = 13,5$; 5 — $\bar{G} = 16,8$

Как было показано в предыдущем разделе на примере процесса одного соударения, при нелинейном контактном взаимодействии звеньев вибродвигателя может возбуждаться большое число гармоник входного звена, высшие из которых либо не могут быть представлены конечноэлементной моделью, либо могут быть «отфильтрованы» в случае подбора слишком большого шага используемых неявных безусловно стабильных схем численного интегрирования. Это в некоторых случаях может привести к некорректным результатам расчета. Поэтому перед проведением расчетов необходимо удостовериться в достаточности выбранной дискретизации и шага интегрирования для рассматриваемого диапазона параметров вибродвигателя. Это проще всего сделать путем исследования влияния числа КЭ конечноэлементной модели и шага интегрирования на получаемые результаты.

На рис. 4.17 приведены зависимости вычисляемых значений нормальной (сплошная линия) и тангенциальной (пунктирная

линия) составляющих средней амплитуды колебаний от числа КЭ при различных шагах интегрирования. Видно, что для соотношения жесткостей $k_N/k_U = 100$ при шаге интегрирования, равном $1/50$ периода возбуждения, результаты получаются вполне удовлетворительными.

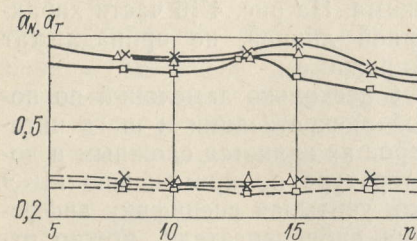


Рис. 4.17. Зависимости вычисляемых значений средних амплитуд колебаний контактной точки из числа КЭ $\psi = 0$, $\bar{\omega} = 1,1$; $\bar{G} = 13,5$ и шагах интегрирования, равных $1/50$ ($\times$), $1/100$ (Δ) и $1/30$ ($\square$) периода возбуждения

Так как число КЭ преобразователя непосредственно связано с числом представляемых моделью мод колебаний, можно заметить, что для данных параметров вибродвигателя в режиме непрерывного движения выходного звена высшие гармоники не играют решающей роли, и уже при числе КЭ, равном 10—15, качественные результаты являются удовлетворительными, несмотря на нелинейности характеристики контактного взаимодействия.

Глава 5 ВОЛНОВЫЕ ВИБРОДВИГАТЕЛИ

Вибродвигатели, использующие фрикционное взаимодействие волнового движения упругого тела и приводимого в движение объекта, называются волновыми. Волновые вибродвигатели являются наиболее универсальными, в них легко реализуется реверсирование движения, они могут работать в различных режимах. В частности, их работа в бесконтактном режиме, когда между колеблющимся элементом и поверхностью ведомого тела создается сжимаемая воздушная пленка, позволяет использовать их в таких устройствах, где не может деформироваться ведомый объект.

В данной главе изложена методика и результаты исследования динамики волновых вибродвигателей с кольцевыми и цилиндрическими преобразователями. Кольцевые преобразователи рассматриваемых вибродвигателей снабжены активизированными волновыми отражателями, что позволило решить проблему их закрепления при многофазном высокочастотном возбуждении преобразователя. Особую ценность в вибродвигателях с цилиндрическими преобразователями представляет то, что несмотря на волновые деформации цилиндрический преобразователь имеет узловые точки, находящиеся в срединном радиальном разрезе цилиндра. Закрепление преобразователей в таких точках является естественным и не приводит к нарушениям траекторий движения контактирующих точек.

Для расчета волновых вибродвигателей с кольцевыми преобразователями использовался метод ЛП-поиска (по точкам Соболя), хорошо зарекомендовавший себя при решении задач оптимального проектирования [19]. При расчете волновых вибродвигателей с цилиндрическими преобразователями применялись объемные конечные элементы, что увеличило порядок матриц. Нахождение оптимальных параметров такого устройства приводит к большим затратам машинного времени, поэтому расчет производился по двум этапам. На первом этапе решалась задача собственных колебаний преобразователя, после чего по коэффициентам преимущественности выбирались его параметры, на втором — рассчитывалась динамика самого вибродвигателя.

5.1. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОГО ВИБРОДВИГАТЕЛЯ С КОЛЬЦЕВЫМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

На рис. 5.1 приведена конечноэлементная модель волнового вибродвигателя с кольцевым преобразователем. Кольцевой пьезокерамический преобразователь разбит на двадцать конечных элементов в форме сектора. Преобразователь, выполненный в виде колеса со спицами, всей внешней окружной поверхностью контактирует с ротором и снабжен волновыми отражателями, которые выполнены из той же керамики и сходятся в радиальном направлении к центру кольца. Длина l_0 отражателей равна длине возбуждаемой окружной волны. На расстоянии l_e от внутреннего радиуса кольца R_1 на стержни нанесен электрод таким образом, чтобы на него подавалось то же напряжение, что и на электрод элемента, находящегося выше стержня в радиальном направлении. Возбуждаемая в преобразователе окружная бегущая волна попадает на активизированные волновые отражатели и возвращается в той же фазе, что устраняет возможность появления узлов. Активизированные волновые отражатели наименьшим образом изменяют движение точек, находящихся на стыке отражателей и кольца. В связи с вышеизложенным становится ясной возможность жесткого закрепления свободных концов отражателей. При подаче высокочастотного многофазного электрического напряжения с частотой, равной второй частоте собственных радиальных колебаний,

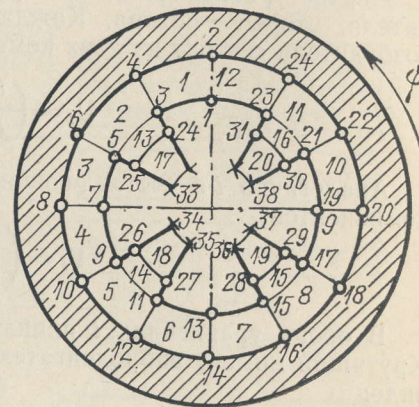


Рис. 5.1. Схема волнового вибродвигателя

каждая точка возбудителя движется по замкнутой траектории в плоскости. Траектория движения близка к эллиптической. В местах контакта возникают силы сухого трения (возбудитель с ротором практически находится в постоянном контакте, вследствие чего ротор начинает вращаться. Ротор выполнен либо в виде кольца, либо в виде цилиндра с моментом инерции J).

Уравнения, описывающие динамику такого вибродвигателя, при учете конечноэлементной дискретизации возбудителя, принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} [M]\ddot{U} + [K]U + [C]\dot{U} &= P(t) + F_i; \\ J\ddot{\psi} + b\dot{\psi} &= M_T, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где $[M]$, $[K]$, $[C]$ — соответственно матрицы масс, жесткости и демпфирования; $P(t)$ — вектор механических сил; F_i — вектор сил взаимодействия ротора и возбудителя вибродвигателя; J — момент инерции; b — коэффициент сопротивления вращению ротора; M_T — крутящий момент вибродвигателя.

Вектор механических сил $P(t)$ для каждого конечного элемента образуется таким образом, как в п. 1.1. Так как ко всем узловым точкам возбудителя приложено внешнее напряжение, то уравнения (1.7) распадаются на две независимые системы.

Первое уравнение системы (5.1) описывает движение возбудителя, второе — ротора. Каждая составляющая перемещений возбудителя состоит из двух компонент:

$$U_i = \begin{pmatrix} U_{i\rho} \\ U_{i\theta} \end{pmatrix}.$$

Аналогично i -я составляющая вектора сил состоит из двух компонент:

$$F_i = \begin{pmatrix} F_{i\rho} \\ F_{i\theta} \end{pmatrix}.$$

В обоих уравнениях i принимает значения 2, 4, 6, ..., 24. Крутящий момент вибродвигателя M_T выражается в следующем виде:

$$M_T = -R_2 \sum_{i=2}^{24} fQ_i,$$

где f — коэффициент сухого трения; R_2 — внешний радиус кольца.

$$Q_i = N_i \operatorname{sign}(\dot{\psi}R_2 - U_{i\theta})\delta_i(U_{i\rho}). \quad (5.2)$$

Нормальная реакция в точках контакта имеет вид

$$N_i = c_i (\Delta_i + U_{i\rho})^{\frac{2m+1}{2m}} = c_i (\Delta_i + U_{i\rho})^{1/2},$$

где Δ_i — сближение преобразователя и ротора в радиальном направлении i -й точки вследствие наличия усилия предварительного натяга; c_i — коэффициент жесткости контакта i -й точки; m — величина прилегания, в рассматриваемом случае равна двум; i — номер узловой точки.

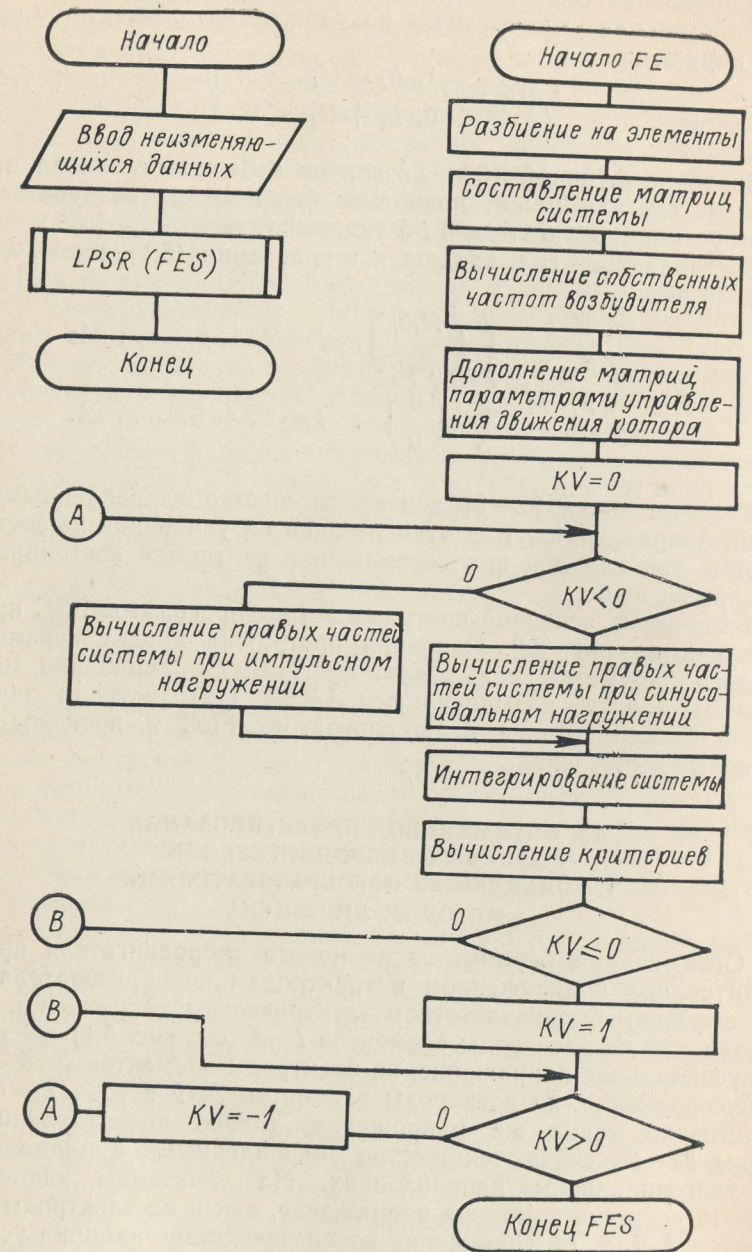


Рис. 5.2. Блок-схема алгоритма

В уравнение (5.2) входит функция $\delta_i(q_{ip}^*)$, которая означает, что либо данная узловая точка находится в контакте, либо контакт нарушен:

$$\delta_i(U_{ip}) = \begin{cases} 1, & \Delta_i + U_{ip} > 0; \\ 0, & \Delta_i + U_{ip} \leq 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Введение функций (5.3) позволяет избежать останова программы, так как может появиться зазор между возбудителем и ротором вибродвигателя в i -й узловой точке.

Составляющие сил, входящих в уравнения (5.1), имеют следующий вид:

$$F_i = \begin{pmatrix} F_{ip} \\ F_{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} N_i \delta_i \\ f Q_i \end{pmatrix}, & i = 2, 4, 6, \dots, 24; \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & i \neq 2, 4, 6, \dots, 24. \end{cases}$$

Узловые точки 32—39 считаются жестко закрепленными в обоих направлениях, т. е. относительно их уравнения не составляются, так как для них перемещения считаются постоянными и равными нулю.

Блок-схема основной программы и подпрограммы FEC представлена на рис. 5.2. Основная программа вводит неизменяющиеся параметры и вызывает программу оптимизации методом ЛП-поиска, называющуюся LPSR [19], которая задает точки Соболя. Далее в подпрограмме FEC и производятся основные вычисления.

5.2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ВИБРОДВИГАТЕЛЕЙ С КОЛЬЦЕВЫМИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ МЕТОДОМ ЛП-ПОИСКА

Оптимизация параметров волнового вибродвигателя производится при подключенном к электродам преобразователя четырехфазном высокочастотном электрическом напряжении. Считается, что на электроды элементов 1—3 (см. рис. 5.1) подается синусоидальное напряжение, на электроды элементов 4—6 — косинусоидальное, на электроды элементов 7—9 и 10—12 — соответственно такие же напряжения, только инвертированные. Узлы 32—38 считаются жестко закрепленными в радиальном и тангенциальном направлениях. На электроды элементов 13—16 подается такое же напряжение, как и на электроды элементов 2, 5, 8, 11. Сближение колец вследствие наличия усилия предварительного натяга и коэффициенты жесткости нелинейных сил приняты для всех точек одинаковыми:

$$\Delta_i = \Delta, \quad c_i = c = 2, 4, 6, \dots, 24. \quad (5.4)$$

Любое проектирование оптимального технического объекта представляет собой многокритериальную задачу. Ранее такие задачи на практике сводились к нелинейному математическому программированию: оптимизировался один из наиболее важных критериев (возможно, компромиссный), а остальные — переводились в ограничения. Одним из недостатков такого метода является невозможность вмешиваться в процесс оптимизации. Если имеется дисплейное оснащение вычислительной машины, можно пользоваться диалоговыми системами типа ДИСО [21].

При работе с ДИСО пользователь имеет возможность задавать метод оптимизации. Начальный этап можно рассчитывать одним методом, а далее использовать другой. При этом требуется не только знание этих методов, но и большой опыт их применения к различным задачам, в противном случае ДИСО используется неэффективно. Осложнения возникают также, если критериальная функция в области параметров не является слишком гладкой. К сожалению, в ДИСО нет ни метода случайного поиска, ни метода ЛП-поиска, которые могут быть успешно применены, особенно в начальных этапах оптимизации, когда нужно «обстрелять» систему. Оптимизация параметров волнового вибродвигателя производилась методом ЛП-поиска (по точкам Соболя).

ЛП-поиск является детерминированным аналогом случайного поиска. Показано, что по сравнению со случайным поиском ЛП-поиск позволяет получить ту же точность при в 4—6 раз меньшем числе пробных точек. В отличие от случайного поиска, нужное испытание можно повторить — числа являются детерминированными, достаточно знать только номер точки Соболя. Этот метод нашел широкое применение в практике оптимального проектирования и конструирования. Кроме того, в задачах проектирования параметры оптимизации часто являются и ее критериями.

Параметрами оптимизации являются J и b , R_1 и R_2 , h , f , Δ , c , l_e , l_0 . В качестве критериев оптимизации выбраны максимальная средняя скорость вращения и минимальное значение коэффициента неравномерности движения ротора вибродвигателя. При расчетах принято, что возбудитель выполнен из пьезокерамики $\text{Pb}(\text{Ti}_{0.48}\text{Zr}_{0.52})\text{O}_3$ [34], спонтанная ось поляризации которой направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Плотность материала, из которого изготовлен возбудитель, $\rho = 7200 \text{ Н/м}^3$, коэффициент затухания $\mu = 0,2 \text{ Н/м}^3 \cdot \text{с}$, амплитуда напряженности электростатического поля $E = 800\,000 \text{ В/м}$.

Критерии оптимизации рассчитывались по следующим формулам:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi_j; \quad \delta\bar{\psi} = (\psi_{\max} - \psi_{\min}) / (2\bar{\psi}). \quad (5.5)$$

Функции $\bar{\psi}$ и $\delta\bar{\psi}$ рассчитывались для установившегося режима, т. е. некоторое количество начальных точек не принималось в расчет по формулам (5.5).

Результаты расчетов, приемлемые для проектирования волнового вибродвигателя, приведены в табл. 5.1. На основании данных этой таблицы можно сделать вывод, что функции (5.5) в области параметров, с инженерной точки зрения, не являются непрерывными. По указанным выше критериям оптимальным явилось испытание с точкой Соболя.

На втором этапе исследования применялся релаксационный метод, т. е. фиксировались все параметры, кроме одного, от

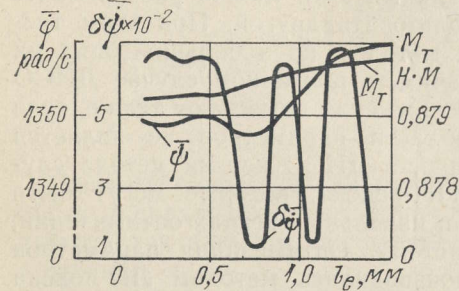


Рис. 5.3. Зависимость среднего значения крутящего момента, средней скорости вращения и неравномерности движения ротора от величины электродного участка на отражателях

которого получены зависимости критериальных функций. В этом случае также использовался метод ЛП-поиска.

На рис. 5.3 представлены зависимости средней скорости вращения, неравномерности движения ротора и среднего значения крутящего момента от длины участка¹, покрытого на волновых отражателях электродами. Хотя среднее значение крутящего момента вибродвигателя и средней скорости вращения ротора почти не

изменяются, величина коэффициента неравномерности движения ротора существенно зависит от этого параметра. При неправильном подборе l_e коэффициент неравномерности движения ротора может почти в шесть раз превысить минимальный.

Из выше приведенных результатов исследований динамики волновых вибродвигателей при синусоидальном возбуждении становится ясна картина протекающих в них процессов.

Параллельно производился расчет критериальных функций при импульсном многофазном электрическом напряжении, подключенном к электродам возбуждителя. Оптимизация производилась тем же ЛП-поиском. Форма подаваемого электрического напряжения представлена функцией, которую можно описать следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & kT + \Delta t \leq t < kT + T/2 + \Delta t; \\ 0, & S(t); \\ -1, & kT + T/2 + \Delta t \leq t < (k+1)T - \Delta t, \end{cases} \quad (5.6)$$

где $S(t)$ — логическое выражение для остальных интервалов времени, $S(t) = (kT \leq t < kT + \Delta t) \cup (kT + T/2 - \Delta t \leq t < (kT + T/2 + \Delta t)) \cup ((k+1)T - \Delta t < t < (k+1)T)$; T — период, $\Delta t = aT$; k — номер периода, $k = [t/T]$ и т.д.

¹ Остальные параметры при этом соответствуют 337 точке Соболя,

Таблица 5.1

Номер точки Соболя	337	13	343	47	253	30	116	15	29	3	31	259	25	334
Φ	0,0144755	0,0170315	0,0190116	0,0177904	0,011747	$7,846 \cdot 10^{-3}$	$4,907 \cdot 10^{-3}$	0,047034	0,078086	0,027736	0,034203	0,023451	0,026864	0,020083
ω/Φ	1349,520	1217,250	1101,940	695,010	562,588	402,325	294,443	696,771	3450,820	574,818	552,829	208,482	159,823	152,991
$M \cdot 10^{-2}$	0,9099	1,1208	1,4498	1,5033	1,2052	0,8052	0,4896	0,4808	1,1658	1,2108	1,5258	1,2136	0,9858	1,1349
$M \cdot 10^{-3}$	1,567	2,605	2,340	0,510	6,230	0,926	0,558	1,234	0,897	1,695	0,446	3,891	4,471	1,210
$M/H \cdot 10^{-2}$	1,47103	1,31241	0,794122	0,861486	0,98115	1,31696	1,22938	2,70038	1,71499	2,05325	2,14225	0,457727	0,59106	1,14047
$M \cdot 10^{-1} \cdot \Delta$	4,86328	3,87500	3,61328	3,65625	4,25781	3,93750	4,20312	4,37500	3,43750	3,50000	4,93750	3,37890	3,68750	3,67578
$I \cdot 10^{-1}$	2,09082	3,59375	3,77832	3,24219	2,73242	3,73437	3,6922	2,4687	4,85937	1,625	1,48437	4,44629	4,29587	1,10645
$M \cdot 10^{-2} \cdot \eta$	0,883	1,260	0,396	0,708	0,875	0,809	1,470	0,931	1,130	1,170	1,460	1,406	0,647	1,170
$M \cdot 10^{-2} \cdot R_2$	2,0889	3,0000	3,2139	3,7656	3,1172	1,8594	1,2227	3,1250	2,7344	2,7500	3,6094	3,1318	2,8594	3,1514
$M \cdot 10^{-2} \cdot R_1$	1,7378	2,1406	2,769	2,8711	2,3078	1,5391	0,7441	2,8281	2,2266	2,1325	2,9141	2,3179	1,8828	2,1675
$\Phi \cdot 10^{-3} \cdot \kappa \cdot M \cdot c$	1,76758	0,31250	3,64258	3,04687	4,121090	3,281250	4,64844	1,56250	2,03125	3,75000	0,78125	2,97850	3,90625	3,48633
$M \cdot 10^{-1} \cdot g$	1,05273	2,6875	2,17773	4,23437	3,98828	3,53125	1,77344	9,43749	1,28125	3,25	8,03124	6,46679	9,15624	5,83398

Номер точки Соболя	ϕ	$\phi, 1/c$	$\omega \cdot 10^{-1}, M$	$\omega \cdot 10^{-2}$	$\omega \cdot 10^{-3}, M$	$\omega \cdot 10^{-4}, H/M$	$\Delta \cdot 10^{-6}, M$	$f \cdot 10^{-1}$	$h \cdot 10^{-2}, M$	$R_2 \cdot 10^{-2}, M$	$R_1 \cdot 10^{-2}, M$	$b \cdot 10^{-3}, Kt \cdot M/c$	$f \cdot 10^{-8}, Kt \cdot M$
335	0,0370030	3959,27	1,4949	4,36523	0,992	3,20886	4,17578	4,48144	1,490	3,2764	2,8550	4,73633	3,58398
337	0,0812424	1359,08	0,9099	4,20898	1,567	1,47103	4,86328	2,09082	0,883	2,0889	1,7378	1,76758	1,05273
30	0,0652414	402,313	0,8052	0,15625	0,926	1,31698	3,93750	3,73437	0,809	1,8594	1,5391	3,28125	3,53125
91	0,0713083	492,565	1,3570	3,94531	0,744	1,3726	4,60937	1,23828	1,000	3,2695	2,5918	2,2656	3,60156
93	0,0735502	358,826	1,1770	3,32031	3,750	5,18722	3,85937	4,05078	0,515	3,207	2,248	2,85156	4,72656
29	0,100849	3457,63	1,1658	1,40525	0,897	1,71499	3,4375	4,85937	1,130	2,7344	2,266	2,03125	1,28125
3	0,1278630	581,128	1,2108	1,25000	1,695	2,05325	3,5000	1,62500	1,170	2,75	2,3125	3,75000	3,25000
27	0,1103350	202,324	1,3458	3,28125	1,430	0,644266	4,1875	0,931875	0,322	2,9844	2,5703	2,65625	2,40625
23	0,363881	171,013	1,4358	2,96875	2,072	0,942034	3,8125	1,203120	0,566	3,2969	2,7422	0,46875	6,34374
31	0,1214690	548,885	1,5258	2,65625	0,446	2,14225	4,9375	1,48437	1,460	3,6094	2,9141	0,78125	8,03124
94	0,1588310	554,155	0,8170	4,57031	0,412	1,39210	3,35937	2,92578	1,490	2,332	1,5605	1,60156	2,47656
339	0,1323410	398,981	1,2699	4,58984	3,050	1,30756	3,36328	3,21582	1,210	3,3389	2,4253	0,51758	7,80273
341	0,1703980	164,623	1,0898	2,33398	1,044	0,89206	4,11328	2,65332	0,721	2,7139	2,0815	4,89258	8,92773
35	0,1318750	185,365	1,2333	0,234375	5,620	0,606544	4,28125	3,52344	0,446	3,0156	2,3555	0,234375	9,29687

Напряжение вида (5.6) с разностью фаз подавалось на каждый электрод возбуждателя. Сложность расчетов заключалась в том, что при такой форме электрического напряжения вектор $P(t)$ должен составляться на каждом шаге интегрирования (5.1). Кроме параметров оптимизации, описанных в предыдущем параграфе, в этом случае добавился еще один a , с

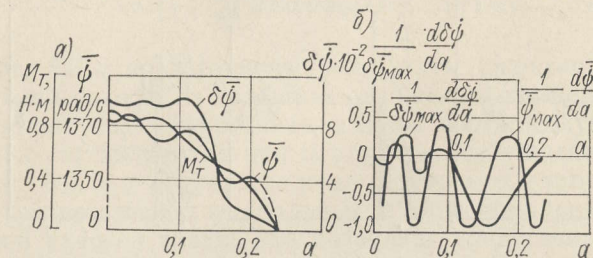


Рис. 5.4. Зависимость среднего значения крутящего момента, средней скорости вращения и коэффициента неравномерности движения ротора от параметра возбуждения (а) и функции чувствительности критерияльных функций (б)

границами изменения от 0 до 0,25. Критерии выбирались такие же (5.5), с допущениями (5.6). В табл. 5.2 представлены соответственно результаты удовлетворительных испытаний. В качестве исследуемого далее набора параметров принята 337 точка Соболя. Хотя она не явилась лучшей при импульсном возбуждении, однако при таких параметрах вибродвигателя наиболее ясно различимы основные особенности его работы при синусоидальном и импульсном возбуждениях.

На рис. 5.4, а показаны зависимости среднего значения крутящего момента, средней скорости вращения и неравномерности движения ротора от параметра возбуждения a . Заметно резкое понижение зависимости неравномерности движения ротора в интервале изменения между 0,1 и 0,2 при почти неизменяющихся значениях других функций. На рис. 5.4, б построены функции чувствительности [12] критериальных функций от параметра a . Функции чувствительности Φ_ω и Φ_δ имеют вид

$$\Phi_\omega = \frac{1}{\bar{\omega}_{\max}} \frac{d\omega}{da} \quad \text{и} \quad \Phi_\delta = \frac{1}{\delta\bar{\psi}_{\max}} \frac{d\delta\psi}{da}.$$

Зависимости функций чувствительности Φ_ω и Φ_δ представлены на рис. 5.4, б.

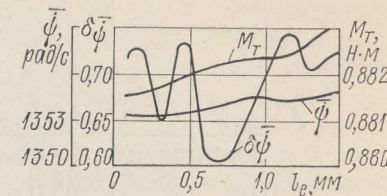


Рис. 5.5. Зависимости среднего значения крутящего момента, средней скорости вращения и коэффициента неравномерности вращения ротора от длины электродной части на отражателях

На рис. 5.5 представлены зависимости среднего значения крутящего момента, средней скорости вращения и неравномерности движения ротора от длины электродной части волновых

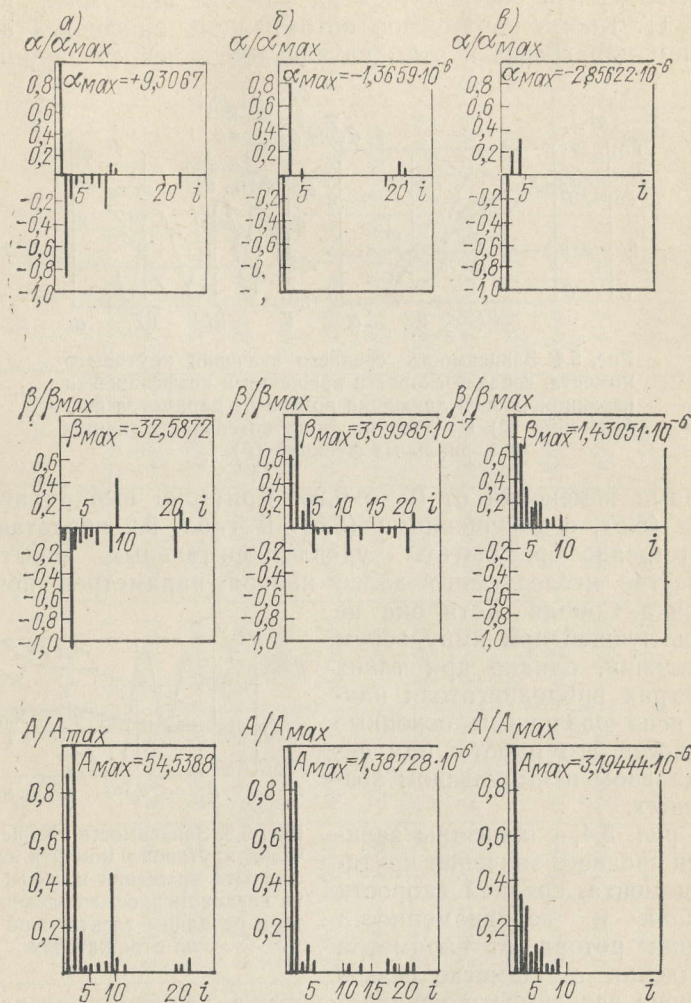


Рис. 5.6. Результаты гармонического анализа при $a = 0,04$: a — средней скорости вращения; b — радиальных колебаний узловой точки; $в$ — тангенциальных колебаний второй узловой точки. Все параметры — по 337 испытанию

отражателей вибродвигателя. Эти зависимости схожи с приведенными в п. 5.1. Однако зона изменения l_e , в которой коэффициент неравномерности движения ротора принимает минимальное значение, намного шире, чем в случае синусоидального возбуждения.

Как было сказано выше, в радиальных колебаниях узловых точек и скорости вращения ротора наблюдаются высокочастотные составляющие. Вследствие этого было произведено разложение в ряд Фурье с учетом только 40 членов:

$$F = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{40} \alpha_i \cos i\omega t + \beta_i \sin i\omega t.$$

На рис. 5.6, a представлены результаты разложения скорости вращения ротора, на графиках отложены коэффициенты при косинусах, синусах и полные амплитуды соответствующих гармонических составляющих при параметре возбуждения $\alpha = 0,04$.

На рис. 5.6, b и $в$ представлены результаты гармонического анализа соответственно радиальных и тангенциальных колебаний второй узловой точки. Это позволяет представить траекторию, которую совершает точка в плоскости (xOy) .

5.3. ДИНАМИКА ВОЛНОВОГО ВИБРОДВИГАТЕЛЯ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗГОТОВЛЕНИЯ

Геометрические погрешности изготовления изделий возникают при обработке вследствие наложения колебаний станка, приспособления, инструмента. Профили колец в радиальном направлении можно считать периодическими функциями полярных углов с периодом 2π . Тогда геометрический профиль внутреннего радиуса ротора будет зависеть от одного угла в радиальной плоскости. Профиль внешнего радиуса возбудителя будем считать идеальным. Такое допущение не изменяет общности задачи, так как, во-первых, изменение координат узловых точек мало по сравнению с радиусом кольца, т. е. изменения координат узловых точек соизмеримы с вычислительными погрешностями машины, и изменений в величинах членов матриц масс и жесткостей не произойдет, во-вторых, профиль внешнего радиуса возбудителя в виде конечного ряда Фурье войдет в выражение для сближения колец вследствие наличия усилия предварительного натяга вместе с профилем внутреннего радиуса ротора с той же зависимостью от полярного угла, что приведет к тому же ряду Фурье только с другими значениями коэффициентов при гармонических составляющих.

Следовательно, сближение ротора и возбудителя вследствие наличия усилия предварительного натяга во всех узловых точках считается неодинаковым и первое равенство (5.4) в данном случае не выполняется. Выражение для сближения колец вследствие наличия усилия предварительного натяга можно выразить следующим образом:

$$\Delta(\theta) = \Delta + \sum_{j=1}^n \xi_j \sin(j\theta + \varphi_j),$$

где Δ — сближение ротора и возбудителя вследствие наличия усилия предварительного натяга в идеальном вибродвигателе; θ — полярный угол; ξ_j , φ_j —

амплитуда и фаза j -й составляющей гармонического разложения профилей внешнего радиуса возбудителя и внутреннего радиуса ротора соответственно; n — количество гармонических составляющих. При расчетах принято $n = 5$.

В дальнейшем исследовалось влияние величин амплитуд отдельных гармонических составляющих выражения (5.7) на динамику волновых вибродвигателей при синусоидальном и импульсном питающем напряжении. Фазы гармонических составляющих приняты одинаковыми и равными нулю. За начальное

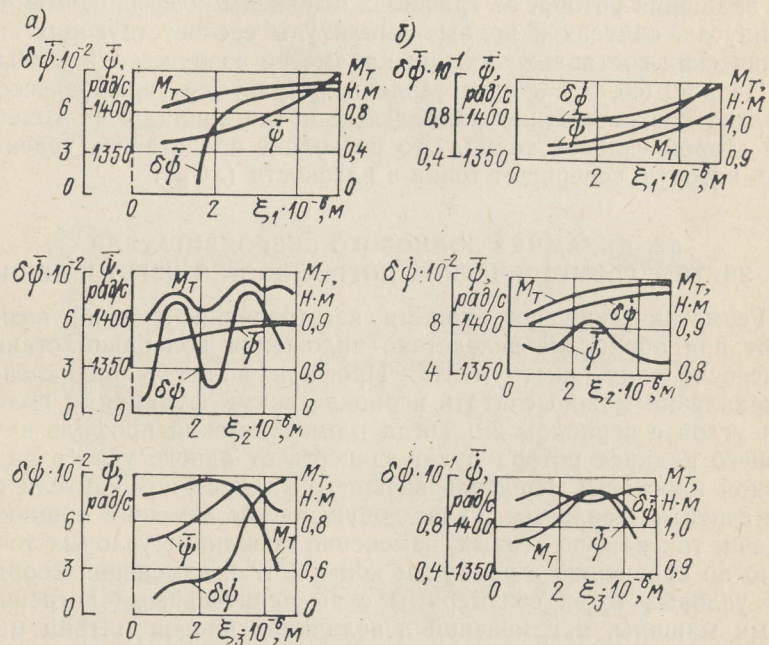


Рис. 5.7. Зависимости среднего значения крутящего момента, средней скорости вращения и неравномерности движения ротора соответственно от первой ξ_1 , второй ξ_2 и третьей ξ_3 амплитуд гармонических составляющих геометрических погрешностей изготовления: а — синусоидальное возбуждение; б — импульсное возбуждение

значение величин амплитуд приняты следующие значения: $\xi_1 = 3$ мкм; $\xi_2 = 2$ мкм; $\xi_3 = 1$ мкм; $\xi_4 = 0,5$ мкм; $\xi_5 = 0,25$ мкм. Все другие параметры вибродвигателей соответствуют 337 испытанию по точкам Соболя.

На рис. 5.7 а и б представлена зависимость среднего значения крутящего момента, средней скорости вращения и коэффициента неравномерности движения ротора от величины амплитуды первой гармоники соответственно для синусоидального и импульсного случаев возбуждения. Установлено, что величины амплитуд гармонических составляющих мало влияют на изменение средней скорости вращения ротора и на среднюю величину крутящего момента вибродвигателя. Однако коэффи-

циент неравномерности движения ротора волнового вибродвигателя при синусоидальном возбуждении претерпевает большие изменения. Значение его изменяется в 4—6 раз в зависимости от амплитуд гармонических составляющих. Таким образом, вибродвигатель, на электроды возбудителя которого подается импульсное напряжение, менее чувствителен к геометрическим погрешностям изготовления.

5.4. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЗБУДИТЕЛЯ ВОЛНОВОГО ВИБРОДВИГАТЕЛЯ

Волновые вибродвигатели являются резонансными устройствами в том смысле, что большинство из них работает на одной резонансной частоте. При других частотах вибродвигатели такого типа обычно теряют работоспособность. Так, исследованные в п. 5.3 волновые вибродвигатели работают при частоте возбуждения, совпадающей с частотой собственных колебаний, соответствующей второй форме радиальных колебаний возбудителя.

Аналогично волновой вибродвигатель с цилиндрическими возбудителями в зависимости от конструкции будет работать на частоте возбуждения, совпадающей с одной из собственных частот цилиндра. Однако от перемещений точек цилиндра в тангенциальном и аксиальных направлениях зависит не только скорость вращения ротора, но и работоспособность вибродвигателя в целом. Для этого требуется, чтобы расстояние по оси частот между собственными радиальными, тангенциальными и аксиальными частотами было минимально. Надо заметить, что для такого возбудителя в интересующем нас диапазоне частот находится довольно много собственных частот. Представление о распределении частот дает функция распределения соответственных частот [7]:

$$N(\omega) = \sum_{\omega_k < \omega} \eta(\omega - \omega_k), \quad (5.7)$$

где $\eta(\omega)$ — единичная функция Хевисайда.

Плотность собственных частот представляет собой производную от функции $N(\omega)$:

$$v(\omega) = dN(\omega)/d\omega.$$

Так как при исследовании собственных колебаний возбудителя использовался МКЭ, то можно построить только эмпирическую функцию распределения собственных частот и соответственно плотность распределения, которая вводится следующим образом:

$$v(\omega) = N(\Omega_k) - N(\Omega_{k-1}) / (\Omega_k - \Omega_{k-1}),$$

где Ω_k — точки разбиения спектра частот.

При построении графика эмпирической плотности собственных частот его вид зависит от способа разбиения оси частот, поэтому с целью получения числа интервалов частот воспользуемся методами математической статистики для построения гистограмм. Количество интервалов зависит от величины пробы

$$S = 1 + 3,32 \lg U,$$

где S — количество интервалов; U — количество вычисленных собственных частот.

Так как каждая точка возбудителя может перемещаться в трех направлениях, существует трудность определения преимущественности частоты колебаний и ее связи с другими частотами по собственным формам. Этот метод пригоден при использовании МКЭ. Допустим, что вычислены собственные частоты и векторы системы. Для n -й собственной частоты составим сумму

$$S_k^n = \sum_{i=1}^r (A_{ik}^n)^2, \quad r = l/k,$$

где k — количество степеней свободы узла; l — количество узловых точек; r — размерность вектора формы для k -й координаты; A_{ik}^n — значение i -го элемента вектора собственных форм.

Далее образуем следующие отношения:

$$m_{jk}^n = S_j^n / S_k^n, \quad j \neq k.$$

Коэффициенты преимущественности m_{jk}^n определяем из выражения

$$m_{kj}^n = 1 / m_{jk}^n, \quad k \neq j.$$

Рис. 5.8. Зависимости коэффициентов преимущественности m_{12} (а) и m_{13} (б) для второй радиальной частоты от внутреннего радиуса при $R_2 - R_1 = 2$ мм;

По значению коэффициентов преимущественности можно сделать следующий вывод: если n -я собственная частота является преимущественно j -й (j соответствует номеру радиальной, тангенциальной и других координат), то

$$m_{jk}^n = \varepsilon, \quad (5.8)$$

где ε — величина, характеризующая связанность частот, которая в зависимости от требований имеет следующие значения:

$$\lg \varepsilon = 1, 2 \dots$$

С физической точки зрения эти формулы эквивалентны отношению собственных колебаний, т. е. величины S_k^n пропорциональны энергии собственных колебаний по n -й частоте в k -м направлении, а m_{jk}^n — отношения собственных энергий колебаний для n -й частоты.

На рис. 5.8 представлены зависимости коэффициентов преимущественности m_{12} и m_{13} от внутреннего радиуса цилиндра.

Индекс «1» обозначает радиальное направление, «2» и «3» — соответственно тангенциальное и аксиальное направления. Зависимости представлены для частоты, соответствующей второй радиальной форме собственных колебаний цилиндра.

5.5. РАСЧЕТ ВОЛНОВОГО ВИБРОДВИГАТЕЛЯ С ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВОЗБУДИТЕЛЕМ

На рис. 5.9 приведена динамическая конечноэлементная модель волнового вибродвигателя с пьезокерамическим цилиндрическим возбудителем. Ротор вибродвигателя представляют два жестко скрепленных конуса, контактирующие боковой поверхностью с возбудителем. Возбудитель разбит на конечные элементы, как это изображено в верхней части рис. 5.9. На электроды верхней части цилиндра подается четырехфазное напряжение с частотой, соответствующей второй радиальной собственной частоте. На электроды нижней части цилиндра подается такое же напряжение, только сдвинутое по фазе на $\pi/2$ относительно верхней половины цилиндра.

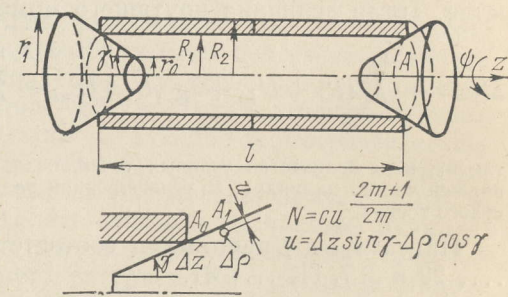


Рис. 5.9. Конечноэлементная модель вибродвигателя

В любой момент времени верхнее и нижнее радиальные сечения будут представлять собой эллипсы, оси которых повернуты относительно друг друга на $\pi/2$. В срединном радиальном сечении образуются узлы, т. е. точки данного сечения практически не колеблются, что связано с вышеупомянутым подключением питающего напряжения. Поэтому в таком сечении, несмотря на волновой характер его деформаций, появляется возможность закрепления возбудителя. Уравнения, характеризующие динамику данного вибродвигателя с учетом конечно-элементной дискретизации, можно записать в следующем виде:

$$[M] \ddot{U} + [C] \dot{U} + [K] U = P(t) + \begin{pmatrix} F_{bk} \\ F_{nk} \end{pmatrix}; \quad (5.9)$$

$$2J\ddot{\phi} = M_T - 2b\dot{\phi}.$$

Момент инерции конуса

$$J = \pi \rho_k / (10 \lg \gamma) [(r_0 + \lg \gamma L)^5 - r_0^5],$$

где ρ_k — плотность материала, из которого изготовлен конус ротора; r_0 — малый радиус конуса ротора; L — высота конуса ротора; γ — угол, который составляет боковая поверхность конуса с осью вращения; $[M]$, $[C]$, $[K]$ — матрицы масс, демпфирования и жесткости возбудителя соответственно.

Каждая составляющая $\{U_i\}$ вектора перемещений узловых точек возбудителя имеет три степени свободы, т. е. три составляющие:

$$U_i = \begin{pmatrix} U_{i\rho} \\ U_{i\theta} \\ U_{iz} \end{pmatrix}.$$

Вектор $P(t)$ соответствует переводу питающего напряжения в механические силы, как это изложено в гл. 1. Вектор спонтанной поляризации пьезокерамики в данном случае направлен радиально, т. е. электроды расположены по боковой поверхности цилиндра внутри и снаружи. В таком случае все узловые точки находятся под электродами и уравнения (1.7) разделяются. Тогда величина крутящего момента M_T имеет вид

$$M_T = - \sum_{i=1}^{n_B} (R_1 + U_{i\rho} + \operatorname{tg} \gamma U_{iz}) f F_{Bi} - \sum_{j=3}^{n_H} (R_1 + U_{j\rho} - \operatorname{tg} \gamma U_{jz}) f F_{Hj},$$

где n_B , n_H — количество узловых точек, находящихся в контакте в верхней и нижней частях цилиндра; R_1 — внутренний радиус цилиндра; f — коэффициент сухого трения.

Индексы i и j принимают соответственно значения 1, 5, 9, ..., 29 и 3, 7, 11, ..., 31.

Силы взаимодействия входного и выходного звеньев соответственно равны

$$F_{Bi} = N_{Bi} \operatorname{sign}(\Delta V_i) \delta_{Bi}; \quad F_{Hj} = N_{Hj} \operatorname{sign}(\Delta V_j) \delta_{Hj},$$

где

$$\Delta V_i = \dot{\psi} (R_1 + U_{i\rho} + \operatorname{tg} \gamma U_{iz}) - \dot{U}_{i\theta};$$

$$\Delta V_j = \dot{\psi} (R_1 + U_{j\rho} + \operatorname{tg} \gamma U_{jz}) - \dot{U}_{j\theta}.$$

Нормальные реакции вычисляются в следующем виде:

$$N_{Bi} = c_i U_{Bi}^{\frac{2m+1}{2m}} = c_i U_{Bi}^{1,25};$$

$$N_{Hj} = c_j U_{Hj}^{\frac{2m+1}{2m}} = c_j U_{Hj}^{1,25},$$

где $m = 2c_f$; c_i , c_j — коэффициенты жесткости контакта.

Сближения U_{Bi} и U_{Hj} можно соответственно представить

$$U_{Bi} = (\Delta_{zi} + q_{iz}) \sin \gamma - (\Delta_{\rho i} + q_{i\rho}) \cos \gamma;$$

$$U_{Hj} = -(\Delta_{zj} + q_{jz}) \sin \gamma - (\Delta_{\rho j} + q_{j\rho}) \cos \gamma,$$

где Δ_{zj} и Δ_{zi} — сближение в аксиальном направлении для нижней и верхней половин цилиндра соответственно; $\Delta_{\rho j}$ и $\Delta_{\rho i}$ — сближение в радиальном направлении для нижней и верхней половин цилиндра соответственно.

Функции, характеризующие наличие контакта:

$$\delta_{Bi} = \begin{cases} 1, & (\Delta_{zi} + U_{iz}) \sin \gamma > (\Delta_{\rho i} + U_{i\rho}) \cos \gamma; \\ 0, & (\Delta_{zi} + U_{iz}) \sin \gamma \leq (\Delta_{\rho i} + U_{i\rho}) \cos \gamma; \end{cases}$$

$$\delta_{Hj} = \begin{cases} 1, & -(\Delta_{zj} + U_{jz}) > (\Delta_{\rho j} + U_{j\rho}) \operatorname{ctg} \gamma; \\ 0, & -(\Delta_{zj} + U_{jz}) \leq (\Delta_{\rho j} + U_{j\rho}) \operatorname{ctg} \gamma. \end{cases}$$

Силы, действующие на каждую узловую точку соответственно для верхней и нижней частей цилиндра, имеют по три компонента:

$$\{F_{Bk}\} = \begin{Bmatrix} N_{Bi} \delta_{Bi} \cos \gamma \\ f F_{Bi} \\ N_{Bi} \delta_{Bi} \sin \gamma \end{Bmatrix}; \quad \{F_{Hk}\} = \begin{Bmatrix} N_{Hj} \delta_{Hj} \cos \gamma \\ f F_{Hj} \\ N_{Hj} \delta_{Hj} \sin \gamma \end{Bmatrix}.$$

На первом этапе исследовалась динамика волнового вибродвигателя с цилиндрическим возбудителем без учета геометрических погрешностей изготовления. На основании результатов, полученных при исследовании собственных колебаний пьезокерамического цилиндра, выбраны следующие геометрические параметры возбудителя: $R_1 = 7$ мм; $R_2 - R_1 = 4$ мм; $L = 45$ мм.

Алгоритм расчета аналогичен использовавшемуся в гл. 4. На первом этапе рассчитывались собственные частоты радиальных колебаний цилиндра, а далее производилось интегрирование уравнений (5.9) и расчет критериев. Исключением явилось то, что исследование осуществлялось только при синусоидальном возбуждении возбудителя и точки Соболя использовались по координатам для получения зависимостей средней скорости вращения и коэффициента неравномерности движения ротора от основных параметров вибродвигателя. Оптимизация не проводилась из-за большой размерности системы, вследствие чего чрезмерно увеличилось машинное время.

Далее исследовалась динамика волнового вибродвигателя без учета геометрических погрешностей изготовления. На втором этапе геометрические погрешности изготовления учитывались в виде периодических функций полярного угла.

Сближение ротора и возбудителя вследствие наличия усилия предварительного натяга с учетом геометрических погрешностей изготовления выражаются:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_z(\theta) &= \Delta_{z0} + \sum_{i=1}^4 A_{iz} \sin i\theta; \\ \Delta_\rho(\theta) &= \Delta_{\rho0} + \sum_{i=1}^4 A_{i\rho} \sin i\theta, \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

где Δ_{z0} и $\Delta_{\rho0}$ — сближение ротора и возбудителя вследствие наличия усилия предварительного натяга в идеальном вибродвигателе; A_{iz} и $A_{i\rho}$ — амплитуды гармонических составляющих геометрических погрешностей изготовления в аксиальном и радиальном направлениях; θ — полярный угол; i — номер гармонической составляющей.

При исследовании динамики вибродвигателя с учетом геометрических погрешностей изготовления амплитуды гармонических составляющих имели следующие значения: $A^{1z} = 5$ мкм; $A^{2z} = 3$ мкм; $A^{3z} = 2$ мкм; $A^{4z} = 1$ мкм; $A^{1p} = 10$ мкм; $A^{2p} = 7$ мкм; $A^{3p} = 5$ мкм; $A^{4p} = 2$ мкм.

За начальные значения параметров выбраны следующие:

Частота возбуждения ω , с^{-1}	416 869
Коэффициент сухого трения f	0,25
Угол скоса конуса $\text{tg } \gamma$	0,5 2562
Меньший радиус конуса r_0 , см	0,67
Длина конуса L , см	0,8
Плотность материала конуса ρ_k , Н/м^3	7800
Коэффициенты жесткости в контакте c , c_i , c_j , Н/м	$0,795041 \times 10^7$

Сближение ротора и возбудителя вследствие наличия усилия предварительного натяга в идеальном вибродвигателе: в радиальном направлении $\Delta_{p0} = -10$ мкм; в аксиальном направлении $\Delta_{z0} = 5,2$ мкм; питающее напряжение $U = 45$ В.

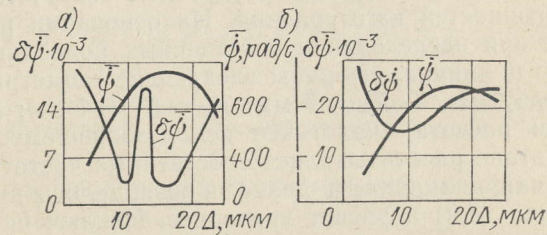


Рис. 5.10. Зависимости средней скорости вращения и неравномерности движения ротора вибродвигателя от сближения звеньев Δ : а — идеальный вибродвигатель; б — вибродвигатель с учетом геометрических погрешностей изготовления

На рис. 5.10, а приведены зависимости средней скорости вращения и коэффициента неравномерности движения ротора вибродвигателя от сближения ротора и возбудителя вследствие наличия усилия предварительного натяга. Сближение Δ выражено в соответствии с (5.8):

$$\Delta = \Delta_i = \Delta_z \sin \gamma - \Delta_p \cos \gamma.$$

В формуле принято $\Delta_z = \Delta_{z0}$, $\Delta_p = \Delta_{p0}$, а гармонические составляющие полярного угла не учитывались.

На рис. 5.10, б представлены те же зависимости с учетом геометрических погрешностей изготовления, учитывался полный ряд в выражении (5.10).

Следовательно, средняя скорость вращения ротора идеального вибродвигателя получается больше при всех значениях характеристики натяга в исследуемом диапазоне. Коэффициент неравномерности вращения выходного звена при этом на реальном вибродвигателе становится существенно менее чувствительным к изменению натяга. Это позволяет использовать вибродвигатели в широком диапазоне величин усилия натяга между звеньями и при помощи его изменения плавно регулировать как крутящий момент, так и скорость вращения выходного звена.

Список литературы

1. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. Бансявичюс Р. Ю., Рагульскис К. М. Вибродвигатели. Вильнюс: Мокслас, 1981. 193 с.
3. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.
4. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 412 с.
5. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
6. ВИБРАН — препроцессор Фортрана для аналитических преобразований/Р. В. Кульветене — Литовский математический сборник, т. XXI, № 3, с. 54.
7. Вибрации в технике: Справочник/Редкол.: В. Н. Челомей (пред.) М.: Машиностроение, 1978—1982. Т. 1—6.
8. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
9. Динамика вибродвигателей кольцевого типа с ударным взаимодействием/Р. А. Бараускас, К. М. Рагульскис — Вибротехника, 1981, № 1/41, с. 61—68.
10. Динамика вибродвигателя, возбуждаемого отдельными импульсами/Р. А. Бараускас, В. Л. Рагульскене, К. М. Рагульскис — Вибротехника, 1981, № 2/42, с. 141—149.
11. Динамическое исследование вибродвигателей с пьезокерамическими кольцевыми возбудителями/Г. П. Кульветис, Г. К. Маркаускайте, Л. Р. Паташене, К. М. Рагульскис — Литовский математический сборник, т. XIX, № 3, 1979, с. 69.
12. Домаркас В. И., Кажис Р. — И. Ю. Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи. Вильнюс: Минтис, 1975. 255 с.
13. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
14. Исследование динамики вибродвигателей с волновыми преобразователями/Г. П. Кульветис, Г. К. Маркаускайте, Л. Р. Паташене — Динамика и колебания механических систем, 1979, с. 44—51.
15. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Киев: Наукова Думка, 1969. 246 с.
16. Кобринский А. Е., Кобринский А. А. Виброударные системы. М.: Наука, 1973. 591 с.
17. Косые удары и их преобразование в непрерывное движение/Рагульскис К. М. и др. — В кн.: Теория машин и механизмов (к 70-летию акад. И. И. Артоболевского) — М.: Наука, 1976. с. 113—119.
18. Лавриненко В. В., Карташев И. А., Вишневский В. С. Пьезоэлектрические двигатели. М.: Энергия, 1980. 112 с.
19. ЛП-поиск в задачах оптимального конструирования/И. М. Соболев, Р. Б. Статников. В кн.: Проблемы случайного поиска, вып. 1. Рига, 1972, с. 117—135.
20. Машинная аналитика для автоматизации составления программ метода конечных элементов/А. С. Гульбинас, М. А. Кубилене, Р. В. Кульветене — В кн.: Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. Дубна: ОИЯИ, 1983.
21. Мойсеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 352 с.
22. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. 256 с.
23. Нагаев Р. Ф. Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978. 160 с.
24. Применение метода конечных элементов к расчету биморфных асимметричных пьезокерамических входных звеньев вибродвигателей в пространственной системе координат/Р. А. Бараускас — Вибротехника, 1981, № 1/41, с. 7—15.

25. Рагульскене В. Л. Виброударные системы. Вильнюс: Минтис, 1974. 319 с.
26. Решение контактных задач релаксационным методом конечных элементов/Э. В. Рыжов, В. И. Сакало, Ю. П. Подлеснов — Машиностроение, № 6, 1980, с. 64—69.
27. Розин Л. А. МКЭ в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1978. 129 с.
28. Тьюарсон Р. Разряженные матрицы. М.: Мир, 1977. 189 с.
29. Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика. М.: Мир, 1974. с. 156.
30. Application of the FEM in the Analysis of Contact Problems/Peter-son H. — Finite Elem. Nonlinear Mech., 1978. v. 2, p. 845—862.
31. FE Approach to Electromechanical Problems with an Application to Energy — Trapped and Surface — Wave devices/Y. Kaga wa, T. Yama-buchi — IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics. SU — 23 (4), 1976, p. 263—272.
32. Investigation of methods of transforming one component high — frequency oscillations into continual motion/R. Bansevichus, K. Ragulskis. — In: Papers of VIII International Conference of Nonlinear Oscillations. Prague, 1978, p. 791—794.
33. On Computer — aided Analytic Element Analysis and the Similarities of Tetrahedron Elements/P. Pedersen. — Inter. Journr. Numer. Meth. In Engng., 1977, vol. II, N 4, p. 611—622.
34. Piezoelectric drives with Several Degrees of Freedom for micromanipulators/R. Bansevichus K. Ragulskis. — In: Papers of V the World Congress on Theory of Machines and Mechanisms. Monreal (Canada), 1979, p. 827—830.
35. Symbolic Generation of Finite Element Stiffness Matrices/A R. Korn-coff, S. J. Fenves. — Comput. & Struct., 1979, vol. 10, n 1/2, p. 119—124.
36. Vibrations of Piezoelectric Crystals/N. C. Dokmeci. — I. J. Engng. Sci., 18(3), 1980, p. 431—448.
37. Vibromotors/K. M. Ragulskis. — The Shock and Vibration Digest, 12 (2), 1980, p. 27—30.
38. High Frequency vibration Motion Converters/K. M. Ragulskis, R. Bansevichus. Vibromotors — In: A Sumposium on Exploitation of Vibration. East Kilbride, Glasgow, Birnichill Institute, National Engineering Laboratory, 1974, p. 1—16.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Метод конечных элементов в применении к расчету вибропреобразователей	4
1.1. Матрицы конечного элемента преобразователя	5
1.2. Вариационная постановка задачи термопьезоэлектричества в матричном виде	8
1.3. Основные соотношения МКЭ в применении к расчету пьезопреобразователей	12
1.4. Конечные элементы композитных стержневых и оболочечных пьезопреобразователей	16
Глава 2. Конечнэлементные модели вибродвигателей	26
2.1. Простейшие модели вибродвигателей	28
2.2. Вибродвигатель с непрерывным контактом	30
2.3. Вибродвигатель с дискретным контактом	41
2.4. Характеристики работы вибродвигателей	45
Глава 3. Методы и алгоритмы применения МКЭ к расчетам вибродвигателей	48
3.1. Получение структурных матриц конечных элементов в аналитическом виде с помощью ЭВМ	—
3.2. Численное интегрирование нелинейных систем дифференциальных уравнений, получаемых в результате применения МКЭ к расчету динамики вибродвигателей	57
3.3. Использование разряженных матриц в методе конечных элементов	60
Глава 4. Вибродвигатели с дискретным контактом	64
4.1. Математическая модель вибродвигателя	—
4.2. Расчет цилиндрического пьезокерамического входного звена вибродвигателя	68
4.3. Расчет вибродвигателя при возбуждении входного звена отдельным импульсом	72
4.4. Расчет вибродвигателя со стержневым входным звеном в режиме непрерывного движения выходного звена	75
Глава 5. Волновые вибродвигатели	80
5.1. Конечнэлементная модель волнового вибродвигателя с кольцевым преобразователем и алгоритм расчета	81
5.2. Оптимальное проектирование волновых вибродвигателей с кольцевыми преобразователями методом ЛП-поиска	84
5.3. Динамика волнового вибродвигателя с учетом геометрических погрешностей изготовления	91
5.4. Собственные колебания цилиндрического возбудителя волнового вибродвигателя	93
5.5. Расчет волнового вибродвигателя с пьезокерамическим цилиндрическим возбудителем	95
Список литературы	99

Римантас Антанович Бараускас,
Геннадий Павлович Кульветис,
Казимерас Миколович Рагульскис

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВИБРОДВИГАТЕЛЕЙ

Редактор *Н. С. Аникиева*
Художественный редактор *С. С. Венедиктов*
Технический редактор *Т. Н. Витошинская*
Корректор *А. И. Лавриненко*
Обложка художника *Б. Н. Осенчакова*

ИБ № 4412

Сдано в набор 12.10.83. Подписано в печать 03.08.84. М-42965. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 6,5. Усл. кр.-отт. 6,75. Уч.-изд. л. 6,59. Тираж 6100 экз. Заказ 903. Цена 35 коп.

Ленинградское отделение ордена Трудового Красного Знамени издательства «Машиностроение». 191065, Ленинград, ул. Дзержинского, 10.

Ленинградская типография № 2 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский пр., 29

Уважаемый читатель!

С целью получения информации о качестве наших изданий просим Вас в прилагаемой анкете подчеркнуть позиции, соответствующие Вашей оценке этой книги.

1. В книге существует
 - а) острая необходимость
 - б) значительная потребность
 - в) незначительная потребность
2. Эффективность книги с точки зрения практического вклада в отрасль
 - а) весьма высокая
 - б) высокая
 - в) сомнительная
 - г) незначительная
3. Эффективность книги с точки зрения теоретического вклада в отрасль
 - а) весьма высокая
 - б) высокая
 - в) сомнительная
 - г) незначительная
4. Материал книги соответствует достижениям мировой науки и техники в данной отрасли
 - а) в полной мере
 - б) частично
 - в) слабо
5. Книга сохранит свою актуальность
 - а) 1—2 года
 - б) в течение 5 лет
 - в) длительное время

6. Название книги отвечает содержанию

- а) в полной мере
- б) частично
- в) слабо

*Дополнительные замечания
предлагаем Вам приложить отдельно.*

Линия отреза